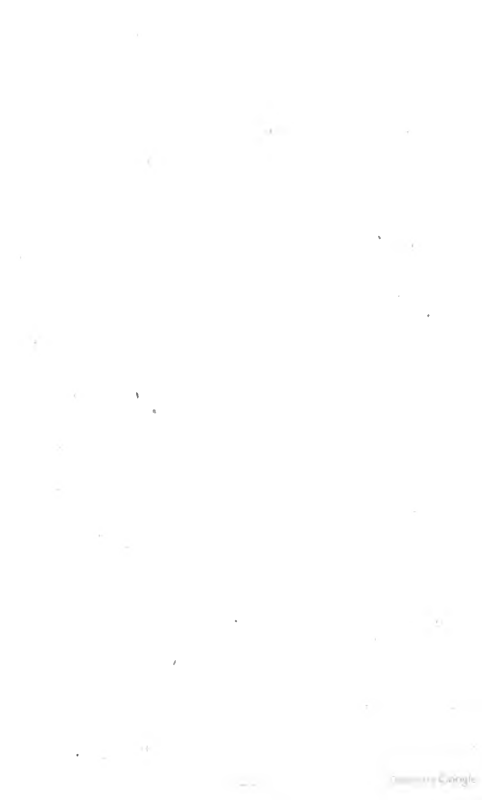


CORSO
DI
MATEMATICA
DEL SIGNOR
ABATE BOSSUT

TRADOTTO DAL FRANCESE

ED ARRICCHITO DI AGGIUNTE

DAL P. ANDREA MOZZONI

VOLUME SECONDO.





NAPOLI
NELLA STAMPERIA DI R. MANZI.
A spese del nuovo Gabinetto Letterario sito strada
Querela num. 17.

1826.

AVVISO

DELL' EDITORE NAPOLETANO.

Non è da porsi in dubbio, che tra le qualità, che per la compilazione di un utile corso di matematiche pure principalmente richieggonsi, annoverar si debbono in primo luogo la brevità e la chiarezza delle teorie di cui si tratta. Or queste appunto sono quelle che nel 2.° Volume del corso del chiarissimo ABATE BOSSUT *oltremodo campeggiano; ed è perciò che il medesimo dai conoscitori di questa scienza universali suffragj ha ritratto. Trasportato in italiano idioma un tal libro, tra le altre versioni, ha meritata la preferenza quella del Padre Mozzoni, a causa di aggiunzioni e miglioramenti, che in essa non sono stati trasandati. Si è creduto quindi di far cosa grata a tutti coloro che per la stessa scienza si avviano, nel riprodurlo colla presente prima edizione Napoletana, nella quale cura alcuna non si è risparmiata, onde le tavole delle figure ed i calcoli nitidi ed esatti risultati fossero. Si spera perciò che pregevole riesca sopra tutte le altre sinora comparse. I più rimarchevoli cambiamenti fatti sull' originale sono quegli stessi che nell' ultima veneta edizione si scorgono.*

Si comprendono in questo 2.° Volume gli Elementi di Geometria Piana e solida; e quelli di Trigonometria Rettilinea, e Sferica. Sieguono a questi l' applicazione dell' Algebra alla Geometria:

indi una breve Appendice sull' arte di levare i Piani, e di costruire le carte Geografiche; ed in fine delle aggiunte che riguardano la teoria generale delle equazioni, non che le trasformazioni delle linee trigonometriche, oltre alcune Nozioni generali sull' analisi indeterminata.

TRATTATO
ELEMENTARE
DI
GEOMETRIA





Definizioni e Nozioni preliminari.

1. La Geometria è una scienza che ha per oggetto la misura dell' estensione.

2. Si distinguono tre specie d'estensione: la *linea*, la *superficie* ed il *solido* o il *corpo*. La linea è un' estensione soltanto in lunghezza: la superficie è un' estensione in lunghezza e larghezza; il solido è un' estensione in lunghezza, larghezza e profondità.

L' estremità d'una linea si chiama *punto*: si può considerare il punto come una linea, la cui lunghezza è diventata zero; similmente si può considerare la linea come una superficie, la cui larghezza è svanita: e la superficie come un solido, la cui profondità è svanita.

3. La linea e la superficie non possono esistere per se stesse ed indipendentemente dal solido: esse vi sono sempre annesse. La superficie è come la coperta esteriore o una porzione della coperta esteriore del solido, e la linea è come l' estremità o una porzione dell' estremità della superficie.

Ma è sempre lecito, ed è qualche volta necessario di separare, col pensiero, la linea e la superficie dal solido, e d' immaginare che la linea o la superficie esistano sole. Di fatti, se voglio, per esempio, conoscere la distanza da Parigi a Lione, egli è chiaro che devo considerare semplicemente la lunghezza del cammino che conduce da una città all'altra, senza pensare alla larghezza di questo cammino, nè alla profondità del terreno, sopra il quale è stabilito. Se voglio misurare l'estensione del pavimento della mia camera, devo considerarne la lunghezza e la larghezza, e non mi devo punto occupare intorno al solido coperto da questo pavimento. Ma se mi si domanda la capacità d' un vaso, per sapere quanti boccali d' acqua può contenere, bisogna che io abbia riguardo nel medesimo tempo alle tre dimensioni del vaso, lunghezza, larghezza, e profondità.

4. Vi sono in generale due sorti di linee: la linea *retta* e la linea *curva*.

La linea retta è quella AB (Fig. 1.) che va da un punto A ad un altro B, senza piegare da alcuna parte: essa può essere considerata come prodotta dal moto del punto A che cammina da A verso B, seguendo sempre la medesima direzione.

Una linea ACB, composta di due linee rette AC, CB, che formano un angolo in C, si chiama *linea spezzata*.

La linea ADB, che devia a ciascun passo dalla direzione rettilinea, si chiama *linea curva*, o semplicemente una *curva*. Essa può in certo senso essere considerata come l'aggregato d'un' infinità di linee spezzate e infinitamente piccole.

5. La linea retta esprime la distanza o il più breve cammino da un punto A ad un altro B. Questo cammino più breve è necessariamente *uni-*

co; di modo che dal punto A al punto B non si può condurre che una sola linea retta, o volendosene condurre molte, esse si confonderanno tutte in una sola e medesima linea. Ma dal punto A al punto B si può condurre un'infinità di linee spezzate ACB, o di curve ADB. Tutte queste linee sono più lunghe della retta AB.

6. Si chiama *piano* o superficie *piana*, una superficie sopra la quale si possono tirare delle linee rette per ogni verso: tale è la parte superiore d'una tavola ben levigata, o d'un foglio di carta ben teso. Ogni superficie che non ha questa proprietà, si chiama in generale *superficie curva*.

7. Le linee rette si tirano sulla carta, facendo scorrere, lungo una riga ben diritta, una penna o lapis, che lascia dietro a se una striscia d'inchiostro, di amatita, o di miniera di piombo ec. Sopra il terreno si piantano di distanza in distanza delle paline nella dirittura d'un medesimo raggio visuale; e da una palina all'altra si disegnano de' solchi che si uniscono capo a capo l'uno all'altro, e formano così una linea retta continua.

Tutte le linee, quelle eziandio che si tirano sopra la carta, hanno della larghezza, perchè la punta d'una penna o d'un lapis ha sempre una certa superficie, e perchè d'altronde egli è necessario che le linee appariscano sensibili a' nostri occhi. Ma si deve prescindere dalla loro larghezza, e non considerare in esse se non la lunghezza.

Le lunghezze delle linee si paragonano fra loro col riferirle ad una medesima unità. Così, per esempio, la distanza da Parigi a Lione essendo di 100 leghe, e quella da Parigi a Lilla essendo di 52 leghe, vedo che queste due distanze stanno fra loro nel rapporto di 100 a 52, ossia di 25 a 13.

8. due linee BA, CA (Fig. 2, 3, 4) che s'incontrano in un punto A, formano un'apertura

BAC che chiamasi *angolo*. Quest' angolo è *rettilineo* (Fig. 2), quando i suoi *lati* o *gambe* BA, CA sono linee rette: è *curvilineo* (Fig. 3) quando i suoi lati sono linee curve, è *mistilineo* (Fig. 4), quando un lato è retto, e l'altro curvo.

Si deve badar bene che un angolo non è già lo spazio compreso fra i suoi lati, ma unicamente l'inclinazione che hanno i suoi lati, l'uno per rispetto all' altro, nella loro intersezione A. Quindi la grandezza d' un angolo non dipende punto dalla lunghezza de' suoi lati; di modo che, se si prolungano, per esempio, i lati BA, CA dell'angolo rettilineo BAC (Fig. 2) verso D ed E, questi lati, benchè divenuti più lunghi, conserveranno sempre, l'uno per riguardo all' altro, la medesima situazione o inclinazione, ossia formeranno sempre il medesimo angolo. Lo stesso s' intenda per gli angoli curvilinei e mistilinei. Imperciocchè, per esempio, l' angolo curvilineo BAC (Fig. 3), è la medesima cosa dell'angolo rettilineo MAN formato dalle rette MA, NA che toccano le curve AB, AC nel vertice A, e che hanno per conseguenza le medesime direzioni di queste curve alla loro origine; esso dunque rimane sempre costante, qualunque sia la lunghezza de' suoi lati BA, CA.

Un angolo s' indica d' ordinario con tre lettere, delle quali quella di mezzo corrisponde al *vertice* o alla punta dell' angolo; ma qualche volta non si adopra che la semplice lettera del vertice.

Avverto, una volta per sempre, che quando nel decorso parlerò d' angoli, avrò in vista gli angoli rettilinei, a meno che non dica espressamente il contrario.

Avverto altresì che le figure di cui parlerò, saranno supposte delineate sopra un medesimo piano; i casi d'eccezione saranno formalmente enunziati.

9. Quando due linee rette CE, DB (Fig. 5) si tagliano, esse formano l'una rispetto all'altra, degli angoli che si appellano *angoli conseguenti*. Così, essendo il punto A l'intersezione di queste due linee, CAB, CAD sono angoli conseguenti; parimente CAD, DAE sono angoli conseguenti.

10. Se (Fig. 6) la retta CE cade *perpendicolarmente*, ossia senza inclinare da alcuna parte, sopra DB: ovvero, ciò che torna allo stesso, se i due angoli conseguenti CAB, CAD sono eguali, ciascuno di essi chiamasi *angolo retto*.

11. Si chiama *angolo acuto* quello che è minore dell' angolo retto; ed *angolo ottuso* quello che è maggiore dell' angolo retto. Così, nella Figura 5, CAB è un angolo acuto, CAD è un angolo ottuso.

12. Ogni superficie limitata nella sua estensione, è terminata da linee che la circondano e la circoscrivono. Queste linee, che si chiamano i *lati* della figura, possono essere rette, curve, o in parte rette ed in parte curve. Nel primo caso, la figura chiamasi *figura rettilinea o poligono rettilineo*: nel secondo, figura o *poligono curvilineo*: nel terzo, figura o poligono *mistilineo*.

La misura de' poligoni rettilinei è uno degli oggetti della Geometria elementare; tra i poligoni curvilinei, il *cerchio* che definiremo fra poco, è il solo di cui ella consideri le proprietà.

13. I poligoni rettilinei hanno differenti nomi secondo il numero de' loro lati: Si chiama *triangolo* quello che ne ha tre: *quadrilatero*, quello che ne ha quattro: *pentagono*, quello che ne ha cinque: *esagono*, quello che ne ha sei: *eptagono*, quello che ne ha sette: *ottagono*, quello che ne ha otto, ec.

14. Si distinguono sei specie di triangoli: tre per rapporto ai lati, e tre per rapporto agli angoli.

1.° Per rapporto ai lati, chiamasi *triangolo equilatero*, quello ABC (Fig. 7) che ha i suoi tre lati AB, BC, CA, eguali fra loro: triangolo *isoscele*, quello ABC (Fig. 8), che ha solo due lati AB, AC, eguali: triangolo *scaleno*, quello ABC (Fig. 9) che ha i suoi tre lati disuguali.

2.° Per rapporto agli angoli, si chiama triangolo *rettangolo*, quello ABC (Fig. 10.) che ha un angolo retto B: triangolo *ottusangolo*, quello ABC (Fig. 11) che ha un angolo ottuso B: triangolo *acutangolo*, quello ABC (Fig. 12) che ha i suoi tre angoli acuti.

15. Nel triangolo rettangolo ABC (Fig. 10.) i lati BA, BC, che comprendono l'angolo retto B, ritengono il semplice nome di lati; ma quello AC che è opposto all' angolo retto B, dicesi *ipotenusa*.

16. Si chiama in generale *base* d'un triangolo, il lato BC sopra il quale s'immagina che esso si appoggi. La stessa denominazione ha luogo in tutte le figure ed in tutti i solidi, pel lato o la faccia che è come l'appoggio della figura o del solido.

La punta di ciascun angolo d'un triangolo può esserne considerata come il vertice per rapporto al lato opposto. Nel triangolo isoscele (Fig. 8), si dà più particolarmente il nome di *base* al lato BC che non ha eguale, ed il nome di *vertice* alla punta dell' angolo che è compreso fra i lati uguali.

17. Un poligono ABCDEF (Fig. 13.) d'un numero qualunque di lati, che ha tutti i suoi lati eguali, e tutti i suoi angoli eguali, dicesi *regolare*. Le altre specie di poligoni sono *irregolari*.

18. Una retta AD, condotta da un angolo di un poligono ad un altro angolo, si chiama comunemente *diagonale*. Questa denominazione è principalmente usitata nel quadrilatero.

19. Il *cerchio* è una figura terminata da una linea curva ABOD (Fig. 14) che chiamasi *circonferenza*, tutti i punti della quale sono egualmente distanti da un punto interno C che dicesi *centro*.

Il cerchio si può considerare come prodotto dal moto d'una retta CA che si rivolge intorno all'estremità C, e che porta, ad una distanza sempre costante dal centro C, un ago fisso in A, che descrive la circonferenza ABOD. A norma di questa nozione, si descrive il cerchio sulla carta, per mezzo dell' istromento detto *compasso*. Per descrivere la circonferenza d' un circolo sul terreno, in vece del compasso, si fa uso d' una corda ben tesa, attaccata con uno de' suoi capi ad una palina fissa e *guernita* all' altro capo d' una palina che gira sul terreno, e vi segna la circonferenza.

20. Si chiama *raggio* ogni retta CA guidata dal centro alla circonferenza, e *diametro* ogni retta DB che passa pel centro, e termina dall'una e dall' altra parte alla circonferenza. Si scorge immediatamente dalla generazione del cerchio, che tutti i raggi sono eguali. Tutti i diametri sono pure eguali, poichè ciascuno di essi è la somma di due raggi.

21. Una retta MN che termina da una parte e dall' altra alla circonferenza, senza passare pel centro, chiamasi *corda*; le porzioni di circonferenza MON, MAN, che corrispondono alla corda MN, si chiamano *archi*.

22. Per una convenzione generale, che risale alla più rimota antichità, i Matematici dividono la circonferenza del circolo in 360 parti eguali che chiamano *gradi*: suddividono il grado in 60 parti eguali che chiamano *minuti*: il minuto in 60 parti uguali che chiamano *secondi*: il secondo in 60 parti uguali che chiamano *terzi*; così di seguito (*).

(*) All' antica divisione del cerchio che qui ricorda l' Au-

I gradi, minuti, secondi, terzi ec. si esprimono rispettivamente coi caratteri °, ′, ″, ‴ ec. che si scrivono in forma di esponenti alla destra delle cifre che esprimono i numeri. Così, per esempio, 25 gradi, 46 minuti, 37 secondi, si denotano con 25,° 46′, 37″.

Il medesimo numero di gradi, minuti, secondi ec. che vi è in una circonferenza, vi è altresì in un'altra più grande; solamente le parti della prima circonferenza sono minori di quelle della seconda. Così, se dal medesimo centro C (Fig. 15), si descrivano coi raggi differenti C*a*, CA, le due circonferenze *abcdf*, ABEDF; ai gradi *ab*, *bc*, *cd*, ec. della prima corrisponderanno in egual numero i gradi AB, BE, ED, ec. della seconda.

23. I corpi o i solidi che esistono in natura, hanno delle forme che possono variare all'infinito, in ragione della figura, delle dimensioni e del numero delle facce onde sono terminati. Ma tutti i solidi de' quali si occupa la Geometria elementare, si riducono a tre, che sono il *Prisma*, la *Piramide*, e la *Sfera*. Noi rimettiamo, per evitare quì ogni oscurità, le definizioni di questi solidi ai luoghi ove tratteremo specialmente delle loro misure.

24. Nel seguito di quest' Opera farò uso formalmente o tacitamente di alcuni *assiomi* e di alcuni *postulati*, che è bene di premettere.

Assioma I. *Un tutto è uguale alla somma di tutte le sue parti, ed è maggiore di ciascuna di esse in particolare.*

II. *Due quantità che sono eguali ciascuna ad una terza quantità, sono eguali fra loro.*

---

tore, i Geometri Francesi ne hanno recentemente sostituita una nuova, di cui si fa cenno all' articolo 223 del *Trattato d' Aritmetica* premesso al presente Compendio.

III. *Se a due grandezze uguali si aggiungono la medesima quantità o delle quantità eguali: ovvero se da due grandezze uguali si sottraggono la medesima quantità o delle quantità eguali; le somme o le differenze saranno eguali.*

IV. *Se a due grandezze disuguali si aggiungono la medesima quantità o delle quantità eguali: ovvero se da due grandezze disuguali si sottraggono la medesima quantità o delle quantità uguali: le somme o le differenze saranno disuguali; e la somma maggiore o la differenza maggiore sarà dalla parte della maggiore delle due quantità disuguali.*

V. *Due linee o due superficie sono eguali, allorchè essendo sovrapposte l' una all'altra, si combaciano o si cuoprono perfettamente.* Medesimamente, *due angoli sono eguali, se il vertice dell' uno essendo collocato sopra il vertice dell' altro, i lati del primo cadono sopra quelli del secondo*, o piuttosto *hanno la medesima direzione di quelli del secondo*, giacchè la grandezza degli angoli non dipende dalla lunghezza dei loro lati.

Questo assioma è quello che chiamasi *principio di soprapposizione*: noi ne faremo un uso frequente.

VI. *Tutti gli angoli retti sono eguali fra loro.* Quindi la somma di due angoli retti è uguale alla somma di due altri angoli retti: il doppio di un angolo retto è doppio d' un altro angolo retto: la metà d' un angolo retto è uguale alla metà di un altro angolo retto, ec.

Postulato I. *Di poter condurre una linea retta da un punto ad un altro qualunque.*

II. *Di poter prolungare, quanto si voglia, una linea proposta, ossia d' immaginare che questa linea sia prolungata.*

III. *Di poter descrivere un cerchio da qualsivoglia centro e con un raggio qualunque, o d' immaginare che questo cerchio sia descritto.*

CAPO II.

Proprietà dell' incontro scambievole delle linee rette.

25. Le linee rette, nell' incontrarsi, formano degli angoli o de' circuiti di triangoli o di poligoni. Hanno adunque fra loro o per le loro semplici posizioni rispettive o per la combinazione delle loro posizioni e delle loro grandezze, dei rapporti che si tratta di esaminare.

26. TEOREMA I. *Ogni angolo* ACB (Fig. 16) *può essere misurato dall' arco di cerchio* AB *descritto dal vertice* C *come centro con un raggio arbitrario fra i suoi lati* CA, CB.

Di fatti, noi possiamo concepire che l' angolo ACB sia prodotto dalla rotazione del lato CB che si rivolge intorno al punto C, mentre il lato CA rimane immobile. Suppongo adunque che nel primo istante il lato CB sia sovrapposto al lato CA, o che ciascun punto B sia confuso con ciascun punto A: egli è chiaro che a misura che il punto B cammina e descrive l' arco AB, si formano successivamente i piccoli angoli ACb, bCb, bCb ec.; di modo che vi sono altrettanti di questi piccoli angoli, quante parti vi sono Ab, bb, bb, ec. nell' arco AbB. Ora la somma di tutti questi piccioli angoli non è altra cosa che l' angolo proposto ACB. Dunque questo angolo è proporzionale al numero delle parti dell' arco AB, ossia può essere misurato da questo arco medesimo.

27. Osservazione. Abbiamo preso ad arbitrio il raggio CA, perchè nell' arco AB vi è il medesimo numero di parti relativamente alla circonferenza intera del cerchio, qualunque sia la lunghezza del raggio. Se il raggio diventa doppio o triplo, le parti diventano doppie o triple in lunghezza, ma nel-

l' arco AB ve ne ha sempre lo stesso numero, e l' angolo ACB non subisce alcuna variazione.

28. COROLLARIO. Gli angoli eguali hanno per misure archi eguali.

Intendo, *archi eguali in numero di parti* delle circonferenze alle quali appartengono. Se i raggi sono eguali, non solo gli archi saranno eguali in numero di parti delle circonferenze rispettive, ma queste parti esse stesse saranno eguali in lunghezza.

Bisogna ricordarsi che gli archi hanno i loro centri ai vertici degli angoli di cui essi sono le misure.

29. TEOREMA II. *Se due angoli* ACB, *acb*, (Fig. 17 e 18) *sono eguali, o ciò, che torna allo stesso, se gli archi* AMB, *amb*, *descritti dai vertici* C, c *come centri, con raggi uguali, che misurano questi angoli sono eguali, le corde* AB, *ab che loro corrispondono, saranno eguali. E reciprocamente, se le corde* AB, *ab sono eguali, gli archi* AMB, amb, *ossia gli angoli* ACB, *acb, saranno eguali.*

Imperciocchè, se si colloca il vertice c sopra il vertice C, e il punto *a* sopra il punto A, egli è chiaro che per l' eguaglianza de' raggi *ca*, CA, e per l' uniformità di curvatura che regna negli archi *amb*, AMB, le parti corrispondenti di questi due archi si copriranno scambievolmente; il punto b caderà sopra il punto B, l' arco intero *amb* sopra l'arco intero AMB, la corda ab sopra la corda AB, il lato cb sopra il lato CB. Dunque l' uguaglianza degli angoli ACB, *acb*, ossia degli archi che ne sono le misure, importa l' uguaglianza delle corde AB, *ab*; e reciprocamente l' uguaglianza delle corde importa quella degli archi o degli angoli.

30. PROBLEMA I. *Fare un angolo che sia uguale ad un angolo dato* ACB (Fig. 17), *o che ne sia multiplo un certo numero di volte.*

Dal vertice C, col raggio arbitrario CA, descrivo l' arco AMB che è la misura dell' angolo proposto ACB, e guido la corda AB. Sopra una linea indefinita cz (Fig. 19) prendo la parte $ca=Ca$: descrivo dal punto c come centro l' arco indefinito *ambd*, in seguito dal punto a come centro, con un raggio *ba* eguale alla corda AB, descrivo un arco di cerchio che tagli l' arco *ambd* nel punto b: tiro la retta cb, ed ho con ciò l' angolo *acb* eguale all' angolo proposto ACB, poichè i raggi *ca*, CA sono eguali, e lo sono pure le corde *ba*, AB. Nello stesso modo si farà ciascuno degli angoli bcd, dce ec. eguale all' angolo ACB. Laonde si vede che l' angolo *acd* sarà doppio dell' angolo ACB; che l' angolo *ace* ne sarà triplo; ec.

31. TEOREMA III. *La somma di due angoli conseguenti* E C A, E C B (Fig. 20.) *vale sempre due angoli retti.*

Imperciocchè, se s' immagina che dal punto C s' innalzi sopra di AB la perpendicolare CD, si vedrà che la somma de' due angoli ECA, ECB vale la somma dei due angoli retti ACD, DCB. Difatti l' angolo ottuso ECA supera l' angolo retto DCA, dello stesso angolo ECD, di cui l' angolo retto DCB supera l' angolo acuto ECB.

32. Osservazione. Si chiamano *complementi* l' uno dell' altro due angoli che presi insieme valgono un angolo retto: e *supplementi* l' uno dell' altro, due angoli che presi insieme valgono due angoli retti. Così i due angoli ECB, ECD sono complementi l' uno dell' altro: i due angoli ECB, ECA sono supplementi l' uno dell' altro.

Egli è chiaro che gli angoli eguali hanno dei complementi eguali o de' supplementi eguali: e che reciprocamente gli angoli, che hanno complementi eguali o supplementi eguali, sono eguali.

33. COROLLARIO. I. Se dal punto C, come

centro, (Fig. 21), con un raggio arbitrario, si descriva una circonferenza di cerchio che incontri la retta AB ne' punti A e B; egli è chiaro che l'arco AEB sarà la metà della circonferenza, e che questa metà sarà la misura de' due angoli conseguenti ECA, ECB presi insieme. L'angolo retto DCA o DCB ha dunque per misura il quarto dell'intera circonferenza: l'angolo ottuso ECA ha per misura un arco maggiore del quarto della circonferenza: l'angolo acuto ECB ha per misura un arco minore del quarto della circonferenza.

34. COROLLARIO II. La retta DE (Fig. 22) essendo supposta perpendicolare ad AB, reciprocamente AB è perpendicolare a DE. Imperciocchè l'angolo DCA essendo retto per ipotesi, se si pretendesse che l'angolo ACE non lo fosse, immaginerei che al punto C s'innalzasse C*a* perpendicolare a DE: allora i due angoli conseguenti DC*a*, *a*CE sarebbero retti ed uguali. Di più, l'angolo DC*a* sarebbe uguale all' angolo DCA (24. Ass. VI.); il che è impossibile, a meno che C*a* non si confonda con CA, cioè a dire, a meno che AC non sia perpendicolare a DE.

Si proverà nella stessa maniera che BC è perpendicolare a DE. Quindi i quattro angoli DCA, ACE, ECB, BCD sono retti, e se dal punto C, come centro, si descriva una circonferenza di cerchio, ciascuno di essi avrà per misura il quarto di questa circonferenza.

35. COROLLARIO III. Allorchè due linee AC, CF (Fig. 23.) non sono in linea retta, ovvero formano una linea spezzata in C, la somma de' due angoli ECA, ECF, che hanno i loro vertici nel punto C, ed il lato comune EC, vale più o meno di due angoli retti; poichè, prolungando AC verso B, la somma de' due angoli ECA, ECB vale due angoli retti, e d'altronde, per ipotesi, CF

non cade sopra CB. Reciprocamente, se la somma de' due angoli ECA, ECF, vale più o meno di due angoli retti, la linea ACF sarà spezzata in C; poichè CF cadrà evidentemente al di fuori o al di dentro dell' angolo ECB.

36. COROLLARIO IV. Se ad un medesimo punto C della retta AB (Fig. 24.) si guida un numero qualunque di linee GC, EC, FC; la somma di tutti gli angoli ACG, GCE, ECF, FCB vale due angoli retti, poichè la somma di tutti questi angoli è la stessa cosa della somma dei due angoli conseguenti ACE, ECB.

37. COROLLARIO V. La somma d' un numero qualunque d' angoli HCG, GCE, ECF, FCK, KCI, ICH, (Fig. 25), formati intorno al medesimo punto C, vale quattro angoli retti; perciocchè, se pel punto C, si conduce la retta AB, ciascuna delle somme degli angoli posti dalle due parti di questa linea, vale due angoli retti.

38. TEOREMA IV. *Se due rette AB, ED, (Fig. 26) si tagliano, gli angoli ECB, ACD* (che si chiamano *Angoli opposti al vertice*) *saranno uguali.* Così pure, *gli angoli ECA, BCD, opposti al vertice, saranno eguali.*

Imperciocchè la somma dei due angoli conseguenti ECB, ECA vale due angoli retti, come pure la somma de' due angoli conseguenti ACD ACE vale due angoli retti; dunque queste due somme sono eguali. Levando da ambe le parti l' angolo ACE, resterà l' angolo ECB eguale all' angolo ACD.

Si proverà nella stessa maniera che l' angolo ECA è uguale all' angolo BCD.

39. TEOREMA V. *La retta CD* (Fig. 27.) *essendo supposta perpendicolare sopra il mezzo* E *della retta AB, ogni punto, come, F situato sopra CD, è ugualmente distante dalle estremità A e B della linea AB.*

Imperciocchè immaginiamoci che la parte CEA della figura rimanendo immobile, si faccia girare l'altra parte CEB sopra CE, come sopra una *cerniera*; egli è chiaro che essendo uguali i due angoli CEB, CEA, ed essendo eguali le due linee EB, EA; egli è chiaro dico, che dopo una mezza rivoluzione, EB cadrà sopra EA, il punto B sopra il punto A, la retta FB sopra la retta FA; dunque (24. Ass. V.) le due rette FB, FA sono eguali, o ciò che torna allo stesso, il punto F è equidistante dai punti B ed A.

40. COROLLARIO. Dunque due obblique FA, FB che si allontanano egualmente dalla retta CD perpendicolare ad un' altra linea AB, sono eguali. Gli allontanamenti di cui si tratta, sono misurati dalle rette uguali EA, EB.

41. TEOREMA VI. *La retta CD* (Fig. 28.) *essendo sempre supposta perpendicolare sopra il mezzo di AB, ogni punto G che non è posto sopra questa perpendicolare, non è equidistante dai punti A e B.*

Dal punto G conducete ai punti A e B le rette GA, GB, e dal punto F in cui GA taglia CD, tirate al punto B la retta FB. Si avrà (39) FA=FB. Aggiungendo FG dall' una e dall' altra parte, si avrà (24, Ass. III.) GA=FB+FG; ma (5) FB+FG>GB; dunque altresì GA>GB, o ciò che torna allo stesso, il punto G è più distante dal punto A che dal punto B.

42. COROLLARIO. Da ciò si scorge che un punto non può essere egualmente distante dalle estremità d'una linea, senza essere situato sulla perpendicolare al mezzo di questa linea.

Da questo principio si ricava la soluzione dei tre problemi che seguono.

43. PROBLEMA II. *Condurre una linea che sia*

perpendicolare sopra il mezzo d' una retta data AB (Fig. 29.).

Dai punti A e B, col medesimo raggio arbitrario, ma maggiore della metà di AB (*), descrivete due archi di cerchio MO, PQ, che si taglino in F: dai medesimi punti descrivete, col medesimo raggio, due altri archi di cerchio, che si taglino in *f*: guidate pei punti F ed *f* la retta CD; essa sarà perpendicolare sopra il mezzo di AB; poichè ciascuno dei due punti F ed *f* essendo equidistante dai punti A, B, è situato nella perpendicolare sopra il mezzo di AB.

44. Osservazione. Lo stesso metodo serve a dividere una linea retta in due parti eguali.

45. PROBLEMA III. *Da un punto dato E sopra la linea KH* (Fig. 30.) *innalzare una perpendicolare a questa linea.*

Dal punto E, come centro, con un raggio arbitrario, descrivete la semicirconferenza AZB, che seghi KH (prolungata, se fa bisogno) nei punti A e B, e che dia EB=EA. In seguito, dai punti A e B, con un raggio arbitrario, ma maggiore di EB o di EA, descrivete due archi di cerchio MO, PQ che si taglino in F: tirate, pei punti F ed E, la retta CD; essa sarà perpendicolare ad AB.

46. PROBLEMA IV. *Da un punto F situato fuori d' una linea KA* (Fig. 31.), *abbassare una perpendicolare a questa linea.*

Dal punto F, come centro descrivete l' arco AZB, che seghi nei punti qualunque A e B la retta KH. prolungata, quanto è necessario: da questi due punti, come centri, con altro raggio, descrivete due

(*) Questa condizione è posta perchè gli archi MO, PQ possano tagliarsi.

-rchi di cerchio *mo*, *pq* che si taglino in *f*: tirate, pei punti F ed *f*, la retta CD; essa sarà perpendicolare ad AB ossia a KH.

47. LEMMA. *Se da un punto D posto dentro un triangolo ACB* (Fig. 32.), *conducansi le rette DA, DB: la somma di queste due linee sarà minore della somma dei lati* CA, *CB*.

Prolungate AD sino in E: avrete (5) 1.° BD $<$EB+ED. Aggiungendo all' una e all' altra parte DA, verrà BD+DA$<$EB+EA. 2.° Avrete EA$>$CA +CE. Aggiungendo ad ambe le parti EB, verrà EB+EA$<$AC+CB. Dunque, *a* maggior ragione, BD+DA$<$AC+CB.

48. TEOREMA VII. *Fra tutte le linee che si possono condurre da un punto qualunque F* (Fig. 33) *ad una retta KH, la più breve è la perpendicolare FE; e delle due oblique FA, FK, che si scostano inegualmente dalla perpendicolare, la più breve è quella FA che se ne scosta meno.*

Prolungate FE della quantità ED=EF: tirate le rette AD, KD. In seguito considerate che le rette FD, KH essendo perpendicolari l' una all' altra, ciascuno dei punti di KH sarà egualmente distante dai punti F e D (39). Dunque AD=AF, e KD= KF. Ma (5) FD$<$FA+AD: e per l' articolo precedente, FA+AD$<$FK+KD. Dunque, prendendo la metà, si avrà EF$<$FA, ed FA$<$FK. Laonde si vede: 1.° che la perpendicolare FE è più breve di ciascuna delle oblique FA, FK; 2.° che di queste oblique la più breve è quella FA che si scosta meno dalla perpendicolare FE.

49. COROLLARIO I. Da un medesimo punto F non si può condurre che una sola perdendicolare ad una retta KH; poichè non vi è che una sola linea che sia la più breve di tutte quelle che si possono condurre dal punto F alla retta KH. Que-

sta perpendicolare esprime la distanza del punto F dalla retta KH.

50. COROLLARIO II. Se dal punto F si guidano alla retta KH due oblique FA, FH, le quali si scostino egualmente dalla perpendicolare, cioè a dire tali che sia EH=EA: queste due oblique saranno eguali (40). Ma non si può condurre dal punto F a KH una terza linea eguale ad FA o ad FH; perciocchè bisognerebbe che essa cadesse dalla medesima parte di una delle due oblique proposte; ed essa sarebbe più o meno lunga di questa obbliqua, poichè si scosterebbe più o meno dalla perpendicolare.

51. TEOREMA VIII. *Due triangoli qualunque ABC, DEF* (Fig. 34 e 35) *sono eguali in tutto, o* (come si dice) *sono perfettamente uguali quando hanno un angolo eguale compreso fra lati eguali ciascuno a ciascuno; cioè a dire, quando, per esempio, l'angolo D è uguale all' angolo A, il lato DE eguale al lato AB, ed il lato DF eguale al lato AC.*

Collocate il vertice D sopra il vertice A, il lato DE sopra il lato AB. Essendo DE=AB, il punto E cadrà sopra il punto B; ed essendo l'angolo D eguale all' angolo A, il lato DF avrà la stessa direzione di AC; finalmente, per essere DF eguale ad AC, il punto F cadrà sopra il punto C, e le linee EF, BC si copriranno esattamente l' una sull' altra. Dunque anche i nostri due triangoli si cuoprono perfettamente l' uno sull' altro e sono per conseguenza in tutto eguali.

52. Osservazione. È da notarsi che nei due triangoli di cui trattasi, gli angoli eguali sono opposti ai lati eguali. Lo stesso avviene in tutti i casi di due triangoli perfettamente uguali. Gli angoli eguali sono opposti ai lati eguali, e reciprocamente. Questa osservazione è essenziale, ed avrà delle frequenti applicazioni nel seguito.

53. TEOREMA IX. *Due triangoli qualunque ABC, DEF sono perfettamente uguali, quando hanno un lato eguale adiacente a due angoli uguali; cioè a dire, per esempio, se EF=BC, angolo E=angolo B, ed angolo F=angolo C.*

Collocate il lato EF sopra il lato BC, il punto E sul punto B, e per conseguenza il punto F sopra il punto C. Essendo eguali gli angoli E e B, avrà ED la medesima direzione di BA, e gli angoli F e C essendo eguali, FD avrà la medesima direzione di CA. Laonde si vede che i due triangoli coincideranno esattamente l' uno coll' altro, e saranno in tutto eguali.

54. TEOREMA X. *Due triangoli qualunque ABC, DEF sono perfettamente eguali quando hanno i tre lati eguali ciascuno a ciascuno, cioè a dire, se EF=BC, ED=BA, FD=CA.*

Il vertice A del triangolo ABC può essere considerato come l' intersezione di due archi di cerchio, descritti dai punti B e C, come centri, coi raggi BA, CA: così pure il vertice D del triangolo DEF può essere considerato come l' intersezione di due archi di cerchio descritti dai punti E *ed* F, come centri, coi raggi ED, FD. Si sovrapponga il lato EF al lato BC: egli è chiaro che i due archi di cerchio, descritti coi raggi eguali BA, ED si confonderanno, e che i due archi di cerchio, descritti coi raggi eguali CA, FD si confonderanno. Dunque i due punti d' intersezione A *e* D non ne formeranno che un solo; ed il triangolo DEF coinciderà esattamente col triangolo ABC; dunque questi due triangoli sono perfettamente uguali.

55. TEOREMA XI. *Due triangoli* ABC, DEF (Fig. 36 e 37), *rettangoli in* B *ed* E, *sono perfettamente uguali quando i lati* AB, DE *sono eguali, e le ipotenuse* AC, DF *sono altresì eguali.*

*

Sovrapponete il lato DE al lato AB, gli angoli retti E e B essendo eguali; EF avrà la medesima direzione di BC. Inoltre considerando i punti C ed F come le intersezioni delle rette BC, EF con due archi di cerchio, descritti dai punti A e D come centri, coi raggi AC, DF; si vedrà che essendo DF=AC, le due intersezioni di cui si tratta, si confonderanno, e che il triangolo DEF si confonderà esattamente col triangolo ABC; dunque questi due triangoli sono perfettamente uguali.

56. SCOLIO I. Dai Teoremi VIII, IX, X seguono tre maniere di fare un triangolo perfettamente uguale ad un altro triangolo qualunque; e dal Teorema XI. segue il modo di fare un triangolo rettangolo perfettamente uguale ad un altro triangolo rettangolo, del quale si conoscono uno de' lati e l' ipotenusa.

I. Se nel triangolo ABC (Fig. 34) conoscete l' angolo A ed i lati AB, AC, formerete il triangolo DEF (Fig. 35), che gli sarà perfettamente uguale, facendo (30) l' angolo D=all' angolo A, e prendendo DE=AB, DF=AC, poi tirando EF, (Teor. VIII.)

II. Se nel triangolo ABC vi sono noti il lato BC, e gli angoli B e C, formerete il triangolo DEF che gli sarà perfettamente uguale, prendendo EF=BC, e facendo l' angolo E=all' angolo B, e l' angolo F=all' angolo C (Teor. IX.).

III. Se nel triangolo ABC vi sono noti i tre lati, formerete il triangolo DEF, che gli sarà perfettamente uguale, prendendo EF=BC, e descrivendo dal punto E, come centro, con un raggio=BA, un arco di cerchio, e dal punto F, come centro, con un raggio=CA, un altro arco di cerchio, che tagli il primo; poi tirando a questo punto d' intersezione le rette ED, FD (Teor. X.)

IV. Se in un triangolo rettangolo ABC (Fig.36,

conoscete uno de' lati AB, e l'ipotenusa AC, formerete il triangolo DEF (Fig. 37) che gli sarà perfettamente uguale, prendendo prima DE=AB, alzando (45) al punto E, sopra ED, la perpendicolare indefinita EF, poi descrivendo dal punto D come centro, con un raggio =AC, un arco di cerchio che tagli EF nel punto F (Teor. XI.).

57. SCOLIO II. Due poligoni in generale, sono perfettamente eguali, allorchè sono composti di triangoli che soddisfano alle condizioni enunziate nei Teoremi citati, e sono similmente disposti sì nell'uno, che nell'altro poligono.

CAPO III.

Delle linee parallele: diversi usi delle loro proprietà.

58. Se da tutti i punti C, C, C, C, d'una retta AB (Fig. 38) s'innalzino sopra questa linea delle perpendicolari eguali CD, CD, CD, CD; ed in seguito da ciascun punto D al punto vicino D si conduca una lineetta retta: l'aggregato di tutte queste lineette formerà una linea continua che chiamo *parallela* ad AB.

59. COROLLARIO. Segue da questa definizione, che la linea DDDD *è retta*. Imperciocchè essendo tutti i punti D egualmente distanti dalla retta AB, egli è chiaro che la linea DDDD non può, in alcun luogo del suo corso, formare nè concavità, nè convessità verso AB, e che conseguentemente tutti i suoi punti sono situati sopra una sola e medesima direzione rettilinea EF. Di fatti, se si concepisse che la retta AB rimanendo immobile, tutte le rette eguali DC, DC, DC, DC, alle quali non si è data alcuna lunghezza determinata, vengano a diminuire continuamente ciascuna della stessa quan-

tità: i punti D, nell' accostarsi ai punti C, conserveranno sempre fra loro, e per rapporto ad AB, la medesima situazione. Ora, quando le linee DC diventano affatto nulle, i punti D si confondono coi punti C, e la linea intera EF si confonde colla retta AB, il che non potrebbe avvenire se EF non fosse una linea retta.

60. TEOREMA I. *La retta* EF (Fig. 39) *essendo supposta parallela alla retta* AB, *se da un punto qualunque* C, *preso sopra* AB, *s' innalzi a questa linea la perpendicolare* CD, *che incontri* EF *in* D: *questa linea* CD *sarà altresì perpendicolare ad* EF.

Prendete arbitrariamente, dall' una e dall' altra parte del punto C, le rette eguali CK, CG; dai punti K, G alzate sopra AB le perpendicolari KL, GH, e tirate le diagonali CL, CH. Essendo la linea EF parallela ad AB, si avrà (58) KL=GH. Dunque i due triangoli rettangoli CKL, CGH sono perfettamente eguali, (51); poichè CK=CG, KL=GH, e l' angolo K= angolo G. Quindi l' angolo KCL= all' angolo GCH, CL=CH. Sottraendo gli angoli KCL, GCH dagli angoli retti eguali KCD, GCD resterà l' angolo LCD= all'angolo HCD; dunque (51) i due triangoli CDL, CDH sono perfettamente eguali, siccome aventi un angolo eguale compreso fra lati eguali ciascuno a ciascuno. Dunque i due angoli conseguenti CDL, CDH sono eguali; e per conseguenza ciascuno di essi è retto, ossia, ciò che torna allo stesso, CD è perpendicolare ad EF.

61. COROLLARIO I. Dunque la linea EF (Fig. 38) essendo supposta parallela ad AB, si può dire altresì che AB è reciprocamente parallela ad EF; poichè le linee eguali CD, CD, CD, CD, riguardate come perpendicolari ad AB, sono reciprocamente perpendicolari ad EF.

62. COROLLARIO II. Dunque due rette parallele AB, EF sono da per tutto equidistanti l'una dall' altra, siccome perpendicolari in ciascuno de' loro punti ad una serie di linee rette eguali CD, CD, CD, CD, che esprimono ciascuna (49) la distanza del punto D dalla retta AB, ovvero la distanza del punto C dalla retta EF.

63. COROLLARIO III. Di qui segue il modo di condurre (Fig. 40) da un punto D, dato o preso ad arbitrio, una parallela alla retta AB. Dal punto D abbassate (46) la retta DC perpendicolare ad AB; e da questo stesso punto innalzate (45) DF perpendicolare a DC; questa retta DF sarà parallela ad AB.

64. COROLLARIO IV. Se, avendo condotte le perpendicolari CD, MN alle due parallele AB, EF, si prendano da una stessa parte le porzioni CR, MO, eguali fra loro, e si conducano le obblique RD, ON: queste obblique saranno eguali, e le parti RO, DN delle linee AB, EF, saranno eziandio eguali. Imperciocchè 1.° i due triangoli rettangoli DCR, NMO sono perfettamente eguali (51), siccome aventi un angolo eguale compreso fra lati eguali ciascuno a ciascuno 2.° Se si tira la retta DM, i due triangoli DCM, DNM, che hanno la medesima ipotenusa, ed il lato DC=NM, sono perfettamente eguali (55); donde risulta CM=DN. 3.° Levando OM da CM, ed aggiugnendo CR che è uguale ad OM, si avrà RO=CM=DN.

65. TEOREMA II. *Se le rette parallele* AB, EF (Fig. 41) *sono tagliate da una retta* KL: *gli angoli* HDB, EHD (che si chiamano *Angoli alterni-interni*) *saranno eguali.*

Imperciocchè, se dai punti H e D si conducano alle due parallele le perpendicolari HO, DG, i due triangoli rettangoli HOD, DGH, che hanno la medesima ipotenusa ed i lati HO, DG eguali (62),

sono perfettamente eguali (55); dunque l' angolo HDO = all'angolo DHG.

66. COROLLARIO. Di qui ne segue, 1.° che gli angoli HDB, KHF (che si chiamano *Angoli interno e esterno dalla stessa parte*) sono eguali; poichè l'angolo KHF è uguale (38) al suo opposto al vertice EHD, che si è dimostrato eguale ad HDB.

2.° Che gli angoli KHF, ADL (che chiamansi *Angoli alterni esterni*) sono eguali; poichè sono opposti verticalmente ad angoli eguali.

3.° Che gli angoli *Alterni interni* FHD, ADH sono eguali; siccome supplementi di angoli eguali. Per la stessa ragione, gli angoli *Alterni esterni* KHE, BDL sono eguali.

4.° Che la somma dei due angoli FHD, BDH (che chiamansi *Angoli interni dalla stessa parte*) vale due angoli retti; poichè la somma dei due angoli conseguenti FHK, FHD vale due angoli retti, e l'angolo FHK è uguale all'angolo HDB. Per una simile ragione, la somma dei due angoli *esterni dalla stessa parte*, FHK, BDL, vale due angoli retti.

67. TEOREMA III. *Reciprocamente, se due rette* AB, EF (Fig. 42.) *sono tagliate da una retta* KL *per modo che gli angoli alterni interni* HDB, EHD *siano eguali; queste due linee* AB, EF *saranno parallele.*

Imperciocchè, se si pretende che EF non sia parallela ad AB, condurrò, pel punto H, la retta *ef* parallela ad AB: allora, pel teorema precedente, l'angolo *e*HD sarà uguale all' angolo HDB; dunque l'angolo *e*HD sarà eguale all'angolo EHD; il che non può essere, a meno che *ef* non cada sopra EF, ovvero che EF non sia parallela ad AB.

68. COROLLARIO. Le due linee AB, EF sono eziandio parallele 1.° se gli angoli HDB, KHF so-

no eguali; perciocchè l'angolo KHF essendo eguale all' angolo EHD (58), i due angoli EHD, HDB saranno eguali.

2.° Se gli angoli KHF, ADL sono eguali, perciocchè allora gli angoli EHD, HDB, che loro sono opposti al vertice, saranno eguali.

3.° Se gli angoli FHD, ADH sono eguali, ovvero se gli angoli KHE, BDL sono eguali; perciocchè da amendue queste supposizioni risulta l'angolo EHD=all' angolo HDB.

4.° Se la somma dei due angoli FHD, BDH, ovvero se la somma dei due angoli FHK, BDL, vale due angoli retti; perciocchè si troverà facilmente che in conseguenza dell' una o dell' altra supposizione, gli angoli EHD, HDB saranno eguali.

69. TEOREMA IV. *La somma dei tre angoli d'un triangolo qualunque* ABC (Fig. 45) *vale sempre due angoli retti.*

Guidate, da uno degli angoli A, la retta MN parallela al lato opposto BC; gli angoli alterni interni ABC, BAM saranno eguali (65); e medesimamente gli angoli ACB, CAN saranno eguali. Dunque la somma dei tre angoli del triangolo BAC, vale la somma dei tre angoli BAM, BAC, CAN; ora la somma di questi tre ultimi angoli vale due angoli retti (36); dunque anche la somma de' tre angoli del triangolo vale due angoli retti.

70. COROLLARIO I. Un triangolo non può avere che un solo angolo retto, ed a maggior ragione che un solo angolo ottuso. Ma può avere i suoi tre angoli acuti.

71. COROLLARIO II. Se la somma di due angoli d'un triangolo è uguale alla somma di due angoli d'un altro triangolo, il terzo angolo del primo triangolo sarà uguale al terzo angolo del secondo. Imperciocchè sottraendo le due somme propo-

ste, ciascuna dai due angoli retti, i due angoli rimanenti saranno necessariamente uguali.

Quindi, per concludere che due triangoli hanno tutti i loro angoli eguali, ciascuno a ciascuno, basterà di conoscere che due angoli di uno di questi triangoli sono eguali eiascuno a ciascuno de' due angoli dell'altro triangolo.

72. COROLLARIO III. Se si prolunga un lato BC d' un triaugolo ABC, l' angolo ACD (che chiamasi *angolo esterno*) sarà uguale alla somma dei due angoli CBA, CAB (che si chiamano *angoli interni opposti*). Imperciocchè la somma dei due angoli ACD, ACB, e la somma dei tre angoli CBA, CAB, ACB, sono eguali tra loro; come aventi per valore comune due angoli retti; dunque, sottraendo da queste due somme, l' angolo ACB, resterà l' angolo ACD eguale alla somma de' due angoli CBA, CAB.

73. TEOREMA V. *In qualunque triangolo, il lato maggiore è opposto all' angolo maggiore, e reciprocamente, l' angolo maggiore è opposto al lato maggiore.*

Sia il triangolo ABC (Fig. 44). Se, per esempio, l'angolo C è maggiore dell' angolo B, il lato AB sarà maggiore del lato AC: e reciprocamente, se il lato AB è maggiore del lato AB; l' angolo C sarà maggiore dell'angolo B. Di fatti, abbassate dall' angolo A sul lato BC la perpendicolare AO: prendete OD=OC, e tirate DA; i due triangoli rettangoli AOC, AOD saranno perfettamente uguali (51), come aventi un angolo eguale compreso fra lati eguali ciascuno a ciascuno; e per conseguenza l' angolo ADO è uguale all' angolo ACO. Ora, la somma dei tre angoli del triangolo AOD essendo eguale alla somma dei tre angoli del triangolo AOB, e questi due triangoli avendo l' angolo O comune, ne segue

che, se l'angolo ACO ossia ADO è>ABO; l'angolo DAO sarà<dell'angolo BAO. Dunque AB si scosterà più che AD dalla perpendicolare AO; e per conseguenza (48) AB sarà>AD ossia AC. Reciprocamente, se è AB>AC ossia AD; AB si scosterà più che AD dalla perpendicolare AO; dunque l'angolo BAO sarà>dell'angolo DAO. Ora la somma dei tre angoli del triangolo AOD vale la somma dei tre angoli del triangolo AOB; dunque, a motivo dell'angolo comune O, l'angolo ADO, ossia ACB sarà>dell'angolo ABC.

Si applicherà facilmente la medesima dimostrazione al triangolo della Figura 45.

74. COROLLARIO I. Poichè la disuguaglianza degli angoli C e B importa la disuguaglianza dei lati opposti AB, AC, e reciprocamente; ne segue che, se gli angoli C e B sono eguali, i lati AB, AC saranno altresì eguali, e reciprocamente.

Quindi un triangolo è isoscele, quando ha due angoli eguali; ed un triangolo è equilatero, quando i suoi tre angoli sono eguali.

75. COROLLARIO II. Due triangoli isosceli sono *equiangoli*, cioè a dire, hanno tutti i loro angoli eguali ciascuno a ciascuno, allorchè hanno soltanto due angoli corrispondenti uguali: cioè a dire, o l'angolo del vertice eguale all'angolo del vertice, o uno degli angoli della base eguale ad uno degli angoli della base. Imperciocchè 1.° Allorchè l'angolo del vertice è uguale all'angolo del vertice, la somma dei due angoli della base è uguale alla somma dei due angoli della base, e siccome in ciascun triangolo isoscele gli angoli della base sono eguali, si vede che i tre angoli del primo triangolo saranno eguali ciascuno a ciascuno dei tre angoli del secondo. 2.° Allorchè un angolo della base di uno dei triangoli è uguale all'angolo della base dell'altro triangolo, i due altri angoli delle basi sono

eziandio eguali. Dunque i due triangoli hanno i tre angoli eguali ciascuno a ciascuno.

Non abbiamo bisogno di far osservare che due triangoli equilateri sono sempre equiangoli; poichè ciascuno degli angoli di questi due triangoli è di 60 gradi.

76. TEOREMA IV. *Se in un quadrilatero* ABCD (Fig. 46) *i lati opposti sono paralleli, i lati opposti saranno eguali: e reciprocamente.*

Si conduca la diagonale BD: essendo i lati AD, BC paralleli, gli angoli alterni interni ADB, CBD, sono eguali (65); e medesimamente essendo i lati AB, DC paralleli, gli angoli ABD, BDC sono eguali. Dunque (53) i due triangoli ABD, CBD sono perfettamente uguali, come aventi un lato eguale adiacente a due angoli eguali. Dunque AD =BC, ed AB=DC.

Reciprocamente, se in un quadrilatero i lati opposti sono eguali, questi lati sono paralleli a due a due. Imperciocchè allora (54) i due triangoli ABD, CBD sono perfettamente uguali, come aventi i tre lati uguali ciascuno a ciascuno. Dunque gli angoli ADB, CBD sono eguali, e conseguentemente le due linee AD, BC sono parallele (67); parimente, i due angoli ABD, CDB sono eguali, e per conseguenza le linee AB, CD sono parallele.

77. Osservazione. Si chiama *parallelogrammo*, un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli. E siccome un tal quadrilatero ha eziandio i lati opposti eguali, si può dire del pari che un parallelogrammo è un quadrilatero, i cui lati opposti sono eguali.

Vi sono più specie di parallelogrammi. Se un parallelogrammo, come quello della (Figura 46), ha due angoli acuti, e due angoli ottusi, dicesi *parallelogrammo obbliquangolo*, o semplicemente *parallelogrammo*. Ed allorchè un parallelogrammo avendo due angoli acuti e due angoli ottusi, ha i suoi quattro lati eguali, chiamasi *rombo* (Fig. 47).

Un parallelogrammo che ha i suoi quattro angoli retti, si chiama *parallelogrammo rettangolo* o semplicemente *rettangolo* (Fig. 48). Se i quattro angoli essendo retti, i quattro lati sono eguali, il rettangolo prende il nome di *quadrato* (Fig. 49).

Un quadrilatero (Fig. 50) che ha semplicemente due lati AD, BC paralleli, si chiama *trapezio*.

CAPO IV

Dell' incontro delle linee rette colle linee circolari, e dell' incontro vicendevole delle linee circolari.

78. TEOREMA I. *Se dal centro C d' un cerchio* (Fig. 51) *si abbassa la perpendicolare* CO *sulla corda* AB: *essa dividerà tanto la corda quanto l'arco* AFB *in due parti eguali.*

Imperciocchè 1°. Poichè la retta CO è perpendicolare ad AB, ed il centro C per dove passa è egualmente distante dai punti A e B, ne segue (42) che questa linea passa pel mezzo di AB.

2.° La retta CO passa pel mezzo F dell'arco AFB. Imperciocchè, essendo perpendicolare sopra il mezzo di AB, ciascuno de' suoi punti (39) deve essere equidistante dai punti A e B. Ora il punto F è ugualmente distante dai punti A e B, poichè gli archi FMA, FNB essendo supposti eguali, le corde FA, FB sono eguali (29). Dunque il punto F è situato sulla perpendicolare CO.

79. COROLLARIO. Di qui si scorge che il centro del cerchio, il mezzo della corda, e il mezzo dell'arco, sono tre punti sempre situati sopra la stessa linea che è perpendicolare alla corda. Ora due punti soli bastano per determinare la posizione d' una linea retta (5); dunque ogni linea che passerà per due dei tre punti proposti, passerà necessariamente pel terzo, e sarà di più perpendicolare alla corda.

80. COROLLARIO II. Se conducasi una seconda corda MN parallela ad AB, i due archi MA,NB compresi fra queste due corde, saranno eguali. Imperciocchè la retta CO essendo perpendicolare ad AB, sarà altresì perpendicolare ad MN (60). Dunque il centro C, il punto E, mezzo di MN, il punto F, mezzo dell'arco MFN, sono situati sopra la perpendicolare CO. Ora poichè si ha *arc.* FMA, =*arc.* FNB, ed *arc.* FM= *arc.*FN; se si sottrae termine da termine, la seconda uguaglianza dalla prima, si avrà *arc.* MA=*arc.*NB.

Reciprocamente, se i due archi MA, NB, situati dalla stessa parte di AB, sono eguali, la corda MN sarà parallela ad AB. Imperciocchè conducendo CO perpendicolare ad AB, si avrà *arc.*FMA=*arc.* FNB. Sottraendo da questa equazione l'equazione *arc.* MA=*arc.*NB, si avrà *arc.* FM=*arc*FN. Dunque la retta CO è eziandio perpendicolare ad MN. Ora, la linea CO essendo perpendicolare a ciascuna delle corde AB, MN, reciprocamente queste due corde sono ad essa perpendicolari; dunque esse formano colla medesima gli angoli alterni interni ADE, NED eguali, siccome retti; e per conseguenza (67) le due linee AB, MN sono parallele.

81. PROBLEMA I. *Far passare una circonferenza di cerchio per tre punti dati* A,B,D(Fig. 52)

Tirate le rette AB, BD. Conducete (43) ME perpendicolare sul mezzo di AB, ed NF perpendicolare sul mezzo di BD. Dal punto C, ove queste due perpendicolari si tagliano, descrivete col raggio CA una circonferenza di cerchio: dico che essa passerà eziandio pei punti B e D, e che sarà conseguentemente la circonferenza domandata. Imperciocchè, essendo CE perpendicolare sul mezzo di AB, le rette CA, CB sono eguali (39). Medesimamente, essendo CF perpendicolare sul mezzo di BD, le rette CB, CD sono eguali. Dunque le

tre linee CA, CB, CD sono eguali; dunque esse sono raggi della medesima circonferenza che passa pei tre punti proposti.

82. COROLLARIO. Il punto C d'intersezione delle perpendicolari ME, NF essendo *unico*, ne segue che pei tre punti A, B, D non si può far passare che una circonferenza di cerchio, e che conseguentemente due circonferenze di cerchio non possono passare pei tre punti medesimi, senza confondersi.

83. PROBLEMA II. *Dividere un angolo dato* ACB (Fig. 55) *in due parti eguali.*

Avendo descritto dal punto C, come centro, con un raggio arbitrario CA, l'arco AmB fra i lati dell'angolo proposto, descrivete dai punti A e B, come centri, con un medesimo raggio parimenti arbitrario, due archi di cerchio che si taglino nel punto x. Guidate pel centro C e pel punto x la retta Cx: essa dividerà l'angolo ACB in due parti eguali. Imperciocchè, i punti C ed x essendo ciascuno egualmente distante dai punti A e B, sono situati (42) sopra una perpendicolare alla corda AB, la qual perpendicolare passa pel mezzo dell'arco AmB (78). Onde ne segue che i due angoli ACm, mCB che hanno per misure degli archi eguali, sono eguali, e sono conseguentemente ciascuno la metà del angolo ACB.

84. COROLLARIO. Operando nella stessa maniera, si può dividere ciascuno degli angoli ACm, mCB in due parti eguali; parimente, ciascuno degli angoli risultanti può essere diviso in due parti eguali; ciascuno di questi in due parti eguali; e così di seguito. Laonde si vede che l'angolo primitivo ACB può essere diviso successivamente in un numero di parti eguali, espresse dai termini di questa progressione geometrica ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : ec.

85. TEOREMA II. *Un angolo che ha il suo vertice nella circonferenza d'un cerchio, e che è formato da due corde, ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.*

Abbiamo veduto (26) che un angolo il quale abbia il suo vertice al centro del cerchio, ha per misura l'arco compreso fra i suoi lati. Dunque, per far vedere che un angolo il quale abbia il suo vertice alla circonferenza, ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati, bisogna dimostrare che quest'arco è doppio di quello che comprenderebbero i lati dell'angolo, se conservando sempre la stessa inclinazione, avesse il suo vertice al centro. Ora, possono accadere tre casi: o uno dei lati dell'angolo proposto BAD (Fig. 54, 55, 56) passa pel centro C (Fig. 54), o il centro è situato dentro l'angolo (Fig. 55), o il centro è situato fuori dell'angolo (Fig. 56).

I. Caso (Fig. 54). Si conduca pel centro C il diametro MN parallelo alla corda AB. L'arco AM sarà eguale all'arco BN (80); e l'angolo BAD sarà eguale all'angolo NCD (66 n.° 1). Ora, l'angolo NCD che ha il suo vertice al centro C, ha per misura l'arco ND compreso fra i suoi lati; dunque l'angolo BAD ha la stessa misura. Ma da un' altra parte i due archi ND, AM sono eguali, poichè misurano gli angoli NCD, ACM, i quali, essendo opposti al vertice nel centro C, sono per conseguenza eguali (38). Dunque *arc.* ND=*arc.* AM=*arc.*BN. Quindi la misura dell'angolo BAD è la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.

II. Caso (Fig. 55). Si conduca pel vertice A e pel centro C il diametro AO. L'angolo proposto BAD sarà diviso in due altri angoli BAO, OAD, ciascuno de' quali (pel I. caso) avrà per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati. Dunque l'angolo BAD avrà per misura la somma delle due

metà degli archi BO, OD, o, ciò che torna allo stesso, la metà dell' arco totale BOD.

III. Caso (Fig. 56.) Si conduca ancora pel vertice A e pel centro C il diametro AO. L'angolo BAO avrà per misura la metà dell' arco BDO, o la metà dell'arco BD più la metà dell' arco DO; e l'angolo DAO avrà per misura la metà dell' arco DO. Dunque l'angolo BAD, differenza dei due angoli BAO, DAO, avrà per misura la metà dell'arco BD, la quale è la differenza delle misure di questi due angoli.

86. COROLLARIO I. Un angolo BAD (Fig. 57) è retto, allorchè avendo il suo vertice alla circonferenza, poggia sopra un diametro BD. Imperciocchè ha per misura la metà della semicirconferenza BND, ossia un arco di 90°, che è la misura dell'angolo retto (33).

Un angolo BAD (Fig. 58) è acuto, allorchè avendo il suo vertice alla circonferenza, poggia sopra una corda che lascia il centro dentro lo spazio BAD. Imperciocchè ha per misura la metà dell'arco BND, il quale è minore della semicirconferenza. Ed al contrario, l'angolo BAD (Fig. 59) è ottuso, allorchè avendo il suo vertice alla circonferenza, poggia sopra una corda BD che lascia il centro C fuori dello spazio BAD; perchè allora l'arco BND è maggiore della semicirconferenza.

87. COROLLARIO II. Due angoli conseguenti valendo insieme due angoli retti (31): se il loro vertice comune è situato nella circonferenza d'un cerchio, la loro somma avrà per misura la metà di questa circonferenza. Dunque, se un angolo BAF (Fig. 60) è formato da una corda AB e da una retta AF esterna al circolo, esso avrà per misura la metà dell'arco AEB sotteso dalla corda AB, più la metà dell' arco AGD sotteso dalla corda AD,

prolungamento di FA. Imperciocchè la somma dei due angoli conseguenti BAD, BAF ha per misura la metà della circonferenza. Ora, l'angolo BAD che è formato dalle due corde AB, AD ha per misura la metà dell'arco BOD compreso fra i suoi lati. Dunque l'angolo BAF ha per misura la metà della parte rimanente BEAGD, ossia la metà dell'arco BEA, più la metà dell'arco AGD.

88. TEOREMA III. *Un angolo* BAD (Fig. 61) *che ha il suo vertice in un punto qualunque dentro il circolo, ha per misura la metà dell'arco* BOD *compreso fra i prolungamenti* Ab, Ad *de' suoi lati.*

Si conduca, dal punto *b*, la corda *bf* parallela a *d* D. L'angolo BAD sarà eguale all'angolo *Bbf* (66 n.° 1); e per conseguenza questi due angoli avranno la stessa misura. Ora (85) l'angolo B*bf* ha per misura la metà dell'arco BOD*f*, o ciò che torna allo stesso, la metà dell'arco BOD ec., più la metà dell'arco D*f*. E siccome gli archi D*f*, *db* sono eguali (80), per essere parallele le corde *bf*, *d*D, noi possiamo dire che l'angolo B*bf* ha per misura la metà dell'arco BOD, più la metà dell'arco *bod*. Dunque anche l'angolo BAD ha la stessa misura.

89. TEOREMA IV. *Un angolo* BAD (Fig. 62) *che ha il suo vertice fuori del circolo, ha per misura la metà dell'arco concavo* BOD *compreso fra i suoi lati, meno la metà dell'arco convesso* HK *compreso fra i suoi lati.*

Guidate dal punto K la corda KQ parallela ad AB. I due angoli BAD, QKD saranno eguali, e per conseguenza avranno la medesima misura. Ora l'angolo QKD ha per misura la metà dell'arco QD, o, ciò che torna allo stesso, la metà dell'arco BOD meno la metà dell'arco BQ. E siccome *arc*. BQ=*arc*. HK, a motivo delle corde parallele HB, KQ; ne segue che la misura dell'angolo

QKD è la metà dell'arco BOD meno la metà dell'arco HK. Dunque l'angolo BAD ha questa stessa misura.

90. TEOREMA V. *Se una retta* MN (Fig. 63) *incontra la circonferenza d'un circolo in due punti* A *e* B, *essa taglierà il circolo, cioè a dire, entrerà nel circolo e ne uscirà.*

Si conducano dal centro C i raggi CA, CB e la perpendicolare CE sopra AB. Le due oblique CA, CB sono eguali, come raggi del medesimo circolo, e ciascuna di esse è maggiore della perpendicolare CE (48). Tutte le linee che si potranno condurre dal punto C alle parti AE, BE, saranno similmente più lunghe di CE e più corte di CA o CB. Dunque 1.° La parte AB della linea proposta è situata tutta intera dentro il circolo. 2.° Se dal punto C si guida al di là di A, la retta qualunque CM, e al di là di B la retta qualunque CN, ciascuna di queste linee allontanandosi più che AC o CB dalla perpendicolare CE, sarà più lunga di CA o CB. Dunque le parti AM, BN dellalinea in quistione sono situate fuori del circolo. Dunque finalmente la linea MN entra nel circolo ene esce; dunque essa taglia il circolo.

91. COROLLARIO. Immaginiamoci che la retta MN si muova parallelemente a se stessa, finchè i due punti A e B, scorrendo sulla circonferenza, vengano a confondersi l'uno e l'altro col punto E. Allora MN tocca semplicemente il circolo in E, e CE diventa un raggio, il quale è perpendicolare alla *tangente* MN (*).

92. PROBLEMA III. *Da un punto dato* E *sopra la circonferenza d'un cerchio, condurre una tangente a questa circonferenza* (Fig. 64).

La soluzione di questo problema è una conseguenza immediata dell'articolo precedente. Dal centro C

(*) *Veggasi la Nota alla fine del Capo.*

al punto dato E guidate il raggio CE, alzate (45) dallo stesso punto E la perpendicolare EN sul raggio CE: essa sarà la tangente ricercata.

93. PROBLEMA IV. *Da un punto dato* E (Fig. 65) *fuori d'un cerchio, condurre una tangente alla circonferenza* ANMn.

Congiungete il punto E ed il centro C del cerchio proposto colla retta EC: dividete (44) questa linea in due parti eguali al punto O; dal quale, come centro, col raggio OE o OC, descrivete la circonferenza *EHNCn* che seghi quella del circolo proposto, ne' punti N ed n: in seguito guidate le rette EN, *En*: esse toccheranno ciascuna la circonferenza *ANMn*. Imperciocchè, se voi tirate i raggi CN, *Cn*, vedrete che ciascuno degli angoli ENC, *EnC* sarà retto (86), come avente il suoi vertice alla circonferenza *EHNCn*, ed appoggiantesi sopra il diametro EC; onde ne segue che le rette EN, *En* sono perpendicolari alle estremità dei raggi CN, *Cn*, e toccano conseguentemente la circonferenza *ANMn*.

94. TEOREMA VI. *Due circonferenze di cerchio che s'incontrano in due punti N ed n* (Fig. 66), *si tagliano*.

Avendo congiunti i centri C ed O dei due circoli X ed Y, colla retta CO, guido dal centro C del cerchio X i raggi CN, *Cn*, e la retta CZS che incontri in Z ed S la circonferenza del cerchio Y: guido in questo ultimo circolo i raggi OZ, ON, OS; e suppongo che le linee OZ, CN, prolungate, se è necessario, s'incontrino in T. Adesso si ha 1.° $CO<CZ+ZO$, e $CO<CN+NO$; sottraendo dall'una e dall'altra parte i raggi eguali OK, OZ, ON, si avrà $CK<CZ$, e $CK<CN$; onde ne segue che il punto K è più vicino al centro C del cerchio X, che non lo sono i punti Z ed N. 2.° Si ha $OT<ON+NT$; sottraendo dall'una e dall'altra

parte i raggi eguali OZ, ON, si avrà $ZT<NT$: ma $CZ<ZT+TC$; dunque a maggior ragione, $CZ<NT+TC$, o sia $CZ<CN$. Quindi tutti i punti Z dell' arco *NKn* sono più vicini che il punto N al centro C, o ciò che torna allo stesso, sono situati dentro il cerchio X. 3.° Si ha OS o $ON<SV+OV$; sottraendo OV dall' una e dall' altra parte, si avrà $VN<VS$: ma $CV+VN>CN$; dunque, a maggior ragione $CV+VS>CN$, o sia $CS>CN$. Quindi tutti i punti S dell' arco *NSn* sono situati fuori del cerchio X. Dunque per fine il cerchio Y entra nel cerchio X, e ne esce; dunque le circonferenze di questi due cerchi si tagliano ne' punti N ed *n*.

95. COROLLARIO I. Immaginiamoci che il cerchio X rimanendo immobile, il cerchio Y se ne allontani secondo la direzione CO: egli è chiaro che i punti N ed *n* si avvicineranno continuamente l' uno all' altro, e che per fine verranno a confondersi l' uno e l' altro nel punto K (Fig. 67). Allora i due cerchj X ed Y si toccano. Laonde si vede che i centri di due cerchi, ed il loro punto di contatto, sono sempre situati sopra una modesima linea retta, e che ogni linea che passerà per due di questi punti, passerà necessariamente pel terzo.

Quindi allorchè si vorranno descrivere due cerchi X ed Y che si tocchino, non si avrà che a mettere i loro raggi CK, KO l' uno appresso all' altro, sopra una stessa linea CO, ed a descrivere in seguito questi due cerchi dai punti C ed O, come centri.

Se si volesse che i due cerchi si toccassero al di dentro, bisognerebbe portare il raggio minore CK sopra il maggiore KO, in modo che il punto C cadesse sul punto c, ovvero che fosse $cK=CK$.

96. COROLLARIO II. Se dal punto K s' innalza perpendicolarmente a CO, la retta AB; questa li-

nea toccherà ciascuno dei due cerchi X ed Y (91); poichè ella sarà perpendicolare all'estremità di ciascuno dei raggi CK, OK.

Nota all' artic. 91.

La nozione che si dà della *tangente* in questo articolo, non è nè esatta per se medesima, nè molto meno adattata all' uopo degli studiosi, pel cui vantaggio si riproducono le presenti Istituzioni. Affinchè eglino possano precisamente comprendere il valore che ha presso i Geometri l' indicato vocabolo, rendesi indispensabile l' accennar qui due teoremi, non espressi abbastanza nel testo.

Il primo è, che i punti della linea MEN (Fig. 64), alzata perpendicolarmente all' estremità del raggio CE stanno tutti fuori del circolo, tranne il solo punto d' incontro E. Difatti qualunque altra linea CD, condotta dal centro C alla MN, riuscirà necessariamente obbliqua (49): quindi sarà essa sempre maggiore della perpendicolare CE ossia del raggio (48); e cadrà in conseguenza il punto D al di fuori della periferia.

Il secondo teorema è, che non può condursi nessuna linea retta entro l' angolo mistilineo ME x F, che formano la MN perpendicolare al raggio e l' arco attiguo F x E. Per convincersene, si osservi che qualunque linea retta GE, cadente nell' angolo GEM, debb' essere necessariamente obbliqua alla CE: si supponga C yx D la perpendicolare che da C può condursi sulla GE, e si prenda y F=y E. Si scorgerà tosto che la CF deve riuscire eguale alla CE: che C y, come perpendicolare, sarà minore di ciascuna di esse: che minori del raggio medesimo CE o CF saran pure tutte le rette condotte dal centro ad ogni punto della linea FE, posto tra F *ed* E (48): che conseguen-

temente una porzione FE della GE giace sempre entro il circolo, cioè non può mai la stessa GE cader tutta intera nel divisato angolo mistilineo ME x F nè dividerlo in due, cominciando dal vertice E.

Suole la proposizione qui dimostrata in ultimo luogo, enunziarsi talvolta in altri termini, con dire che *la MN, perpendicolare all' estremità del raggio, forma coll' arco attiguo un angolo minore di qualsisia angolo rettilineo immaginabile*: o pure che *la perpendicolare anzidetta s' accosta all' arco medesimo più che nol può ogni altra retta guidata pel punto* E. Entrambe queste maniere di esprimersi tornano evidentemente al senso del teorema spiegato poc' anzi; e sarebbe inutile l' applicar loro di proposito i ragionamenti già adoperati a provare la verità di esso.

Giova bensì avvertire che il genuino e generico concetto di *tangente* sta appunto nell'accennata proprietà dell' angolo di *contatto* MExF, vale a dire, nell' esser l' angolo medesimo essenzialmente minore di qualunque possibile angolo rettilineo. Questa condizione ha luogo, rispetto al circolo, nelle rette che partendo da un punto qualsiasi della circonferenza, si trovano perpendicolari al raggio corrispondente. Nelle altre curve, la posizione della *tangente* s' associa, come vedrassi, con altri rapporti particolari; ma, non ostante siffatta varietà, s' avvera sempre in tutte il mentovato carattere dell' angolo compreso fra la retta *tangente* e l' arco attiguo della curva.

La definizione della *tangente*, stabilita in questa nota, distingue, senz' ombra di equivoco, la *tangente* stessa dalle rette che incontrano semplicemente l' arco, e suggerisce insieme un metodo generalissimo per condurre una retta che tocchi un punto qualunque d' una curva qualsiasi. Se E, per

esempio, voglia supporsi il punto dato: se ne prenderà, sulla curva proposta E x F, un altro F ad arbitrio: poi, condotta per entrambi la GE, s' immaginerà che questa giri intorno ad E, finchè l' intersezione F venga a coincidere coll' intersezione E. L' istante del loro concorso determinerà la posizione ME della *tangente* cercata al punto E; poichè rimane in tale ipotesi manifestamente esclusa la possibilità di condurre da E nessun' altra retta che cada dentro l' angolo formato dalla ME e dall' arco E x F.

Non è egualmente universale il divisamento a cui si ricorre nel testo (91), e che suppone mobili a un tempo entrambi i punti d' incontro A, B (Fig. 63) per farli quindi congiungere in un solo E (Fig. 64). Questa maniera di ravvisar la genesi delle *tangenti*, non può con piena sicurezza adattarsi che al circolo e alle curve dello stesso ordine: trasportata alle curve degli ordini superiori, essa offrirebbe non rare volte risultati assolutamente erronei. Ma di ciò accadrà forse di trattare più opportunamente in progresso: qui basti averne posto innanzi un rapido cenno.

CAPO V.

Delle linee proporzionali: delle figure simili: delle linee tagliate in ragione reciproca.

97. Una linea può essere doppia o tripla d'un'altra linea: una superficie, doppia o tripla d' un'altra: un solido doppio o triplo d' un altro. Esistono adunque fra le grandezze geometriche dei rapporti e delle proporzioni, come fra le grandezze numeriche. Non dobbiamo scordarci che generalmente i due termini d' un medesimo rapporto devono essere della medesima specie; ma due rap-

porti d' altronde eguali posssono essere composti di quantità di specie differente. Quindi, per esempio, una linea può stare ad una linea, come una superficie ad una superficie o come un solido ad un solido; ma una linea non può stare ad una linea, come una linea ad una superficie, o come una superficie ad un solido.

Delle linee proporzionali in generale.

98. TEOREMA I. *Se vi sono due linee AV, AZ* (Fig. 68.) *che facciano tra loro un angolo qualunque VAZ: e se, avendo presso sulla prima un numero qualunque di parti eguali AB, BC, CD, DE, si conducono, sotto un angolo qualunque, le parallele BF, CG, DH, EI che incontrino la seconda nei punti F, G, H, I: tutte le parti AF, FG, GH, HI, di questa seconda linea, saranno eziandio eguali fra loro.*

Guidate dai punti. *F*, *G*, *H*, e parallelemente ad *AV*, le rette, *FK*, *GL*, *HM*: tutti i triangoli *ABF*, *FKG*, *GLH*, *HMI* saranno perfettamente eguali. Perciocchè, a motivo delle parallele *BF*, *CG*, *DH*, *EI*, tutti gli angoli *AFB*, *AGC*, *AHD*, *AIE* sono eguali (66. n.° 1) e parimente, a motivo delle parallele *AV*, *FK*, *GL*, *HM*, tutti gli angoli *ZAV*, *ZFK*, *ZGL*, *ZHM* sono eguali: di più si ha (76) $FK=BC=AB$, $GL=CD=AB$, $HM=DE=AB$; dunque tutti i triangoli proposti hanno un lato eguale adiacente a due angoli eguali, e sono per conseguenza in tutto eguali (53). Dunque $AF=FG=GH=HI$.

99. COROLLARIO. Se si prende un medesimo numero (per esempio due) delle parti eguali di *AV* e di *AZ*, ed un altro medesimo numero (per esempio tre) delle parti eguali di *AV* e di *AZ*, le quattro somme formeranno evidentemente una

proporzione. Si ha dunque $AC : AG :: AD : AH$; o *alternando* $AC : AD :: AG : AH$. Medesimamente si ha $BD : BE :: FH : FI$; così di tutte le altre proporzioni di simil natura.

100. TEOREMA II. *Se nel triangolo* A B C (Fig. 69) *si conduca la retta* DE *parallela al lato* BC, *e dal punto* E *la retta* EK *parallela al lato* AB : *i lati* AB AC,BC *saranno tagliati proporzionalmente nei punti* D,E,K; *cioè a dire, si avrà questa serie di rapporti eguali*, AB : AD :: AC : AE :: BC : DE.

Reciprocamente. *Se si ha la proporzione* AB : AD :: AC : AE, *la secante* DE *sarà parallela al lato* BC. *E se si ha la proporzione* AC : AE :: BC : DE *o* BK, *la secante* EK *sarà parallela ad* AB.

Immaginiamoci che la retta AB sia divisa in un'infinità di parti eguali, e che da tutti i punti di divisione si siano condotte, parallelemente a BC o a DE, delle linee rette che terminino ad AC; queste linee divideranno (98) AC in un'infinità di parti eguali, corrispondenti ciascuna a ciascuna delle parti di AB; di più, i punti D ed E cadranno o potranno essere riputati di cadere sopra due punti di divisione di AB, e di AC, poichè queste due linee sono divise ciascuna in un'infinità di parti. Medesimamente, se da tutti i punti di divisione di AC conducansi delle rette parallele ad AB, esse divideranno BC in un'infinità di parti eguali, corrispondenti alle parti delle due prime linee, ed il punto K sarà o potrà essere riputato uno dei punti di divisione di BC. Frattanto, le parti finite AD, AE, BK essendo parti corrispondenti delle tre linee AB, AC, BC, si hanno (99) queste due proporzioni $AB : AD :: AC : AE$; $AC : AE :: BC : BK$ o DE: le quali essendo poste le une di seguito alle altre, siccome aventi la medesima ra-

gione, danno questa serie di rapporti eguali, AB: $AD :: AC : AE :: BC : DE$ (*).

Reciprocamente, se si ha $AB : AD :: AC : AE$, la secante DE sarà parallela a BC. Imperciocchè supponiamo, per un momento, che la linea, la quale partendo dal punto D sarebbe parallela a BC, venga a terminare al punto e situato sopra o sotto al punto E, si avrebbe come abbiam veduto, AB: $AD :: AC : Ae$. Ora (ip.) $AB : AD :: AC : AE$; dunque si avrebbe $AC : Ae :: AC : AE$; il che è impossibile, a meno che il punto e non si confonda col punto E, o che DE non sia parallela a BC. Si dimostrerà nella stessa maniera che dalla proporzione $AC : AE :: BC : BK$ o DE, risulta il parallelismo di EK con AB.

101. COROLLARIO I. Se si taglia un triangolo ABC (Fig. 70) parallelemente alla sua base BC, con quante si vogliano rette DE, FG, HI, i lati AB, AC saranno tagliati proporzionalmente, cioè a dire, si avrà questa serie di rapporti eguali, $AB : AC :: AD : AE :: AF : AG :: AH : AI :: DF$: $EG :: FH : GI :: HB : IC$. Ciò segue evidentemente dall'articolo precedente e dall'articolo 99.

102. COROLLARIO II. Le rette AB, CD (Fig. 71) essendo supposte parallele: se da un punto X si guidano le linee XC, XG, XH, XD che le incontrino, le parti di AB saranno proporzionali alle parti di CD, cioè a dire, si avrà questa serie di rapporti eguali, $AE : CG :: EF : GH :: FB : HD$. Imperciocchè si ha primieramente $AE : CG :: XE$: XG; $XE : XG :: EF : GH :: XF : XH$; $XF : XH$ $:: FB : HD$. Ora tutti questi rapporti sono eguali, come si vede; dunque (non prendendo che quel-

(*) *Vedi la Nota prima alla fine del Capo.*

li di cui si ha bisogno) $AE : CG :: EF : GH ::$ $FB : HD$.

103. COROLLARIO III. Se si divide l'angolo A d'un triangolo BAC (Fig. 72) in due parti eguali, colla retta AD; le parti BD, DC del lato opposto all' angolo A, saranno proporzionali ai lati AB, AC adiacenti a questo stesso angolo; cioè a dire, si avrà $BD : DC :: AB : AC$. Imperciocchè, se dal punto B conducasi parallelemente a DA la retta BE che incontri in E il lato CA prolungato, si avrà primieramente $BD : DC :: EA : AC$; ma l' angolo EBA è uguale (65) al suo alterno BAD, il quale, per ipotesi, è uguale all' angolo DAC, e per questo è uguale (66 n.° 1) all'angolo BEA; dunque i due angoli ABE, AEB sono eguali; e per conseguenza (74), il triangolo AEB è isoscele; dunque $AE=AB$. Sostituendo pertanto AB in vece di AE nella proporzione $BD: DC :: AE : AC$, essa diverrà $BD : DC :: AB : AC$.

104. PROBLEMA I *Dividere una linea retta data* AB (Fig. 73) *in parti proporzionali ad alcuni numeri dati: per esempio, in tre parti* AD, DE, EB, *che siano tra loro come i numeri* 2, 3, 4.

Guido, da una delle estremità A della retta AB, una retta indefinita AZ, che faccia con AB un angolo qualunque. Avendo scelto ad arbitrio, la piccola linea mn per unità, sopra AZ prendo $AP=2mn$, $PQ=3mn$, $QR=4mn$: onde ne risulta che le parti AP, PQ, QR della linea AZ sono tra loro come i numeri proposti 2, 3, 4. Dal punto R all' altra estremità B della linea data AB, guido la retta RB; in seguito conduco, parallelemente a questa linea, le rette QE, PD. Allora si ha (101) $AP : PQ : QR :: AD : DE : EB$; ma $AP : PQ : QR :: 2 : 3 : 4$; dunque $AD : DE : EB :: 2 : 3 : 4$.

105. Osservazione. Se si dovesse dividere la retta AB in un certo numero di parti eguali, per

esempio, in tre, si prenderebbero, sopra la retta *AZ*, colla stessa apertura arbitraria di compasso, tre parti eguali *AP*, *PQ*, *QR*: in seguito si condurrebbero le parallele *RB*, *QE*, *PD*; allora le parti AD, *DE*, *EB*, sarebbero eguali.

106. PROBLEMA II. *Trovare una quarta proporzionale a tre linee date* GH, IK, LM (Fig. 74).

Conduco due linee *AV*, *AZ* che formino fra loro un angolo qualunque: sulla prima trasporto *GH* da *A* in *B*, ed *IK* da *A* in *C*: sulla seconda, trasporto *LM* da *A* in *E*: congiungo i punti *B* ed *E* colla retta *BE*: guido ad essa la parallela *CF*; *AF* è la quarta proporzionale cercata; perciocchè si ha (100) *AB* o *GH*: *AC* o *IK*:: *AE* o *LM*:*AF*.

107. Osservazione. Si trova, collo stesso mezzo, una terza proporzionale a due linee date: perciocchè non si ha che a supporre che le due linee *IK*, *LM* siano eguali, e fare d' altronde la medesima costruzione; si avrà *AB* o *GH*: *AC* o *IK*: *AE* o *LM* o *IK*: *AF*, ovvero ⸬ *GH*: *IK*: *AF*. Quindi *AF* è la terza proporzionale domandata.

108. TEOREMA III. *Se da due punti* M *e* P (Fig. 75) *della retta* MP, *s' innalzino le linee* MN, MR, PQ, PV, *parallele a due a due e proporzionali; cioè a dire tali che* MN *sia parallela a* PQ, MR *parallela* a PV *e che abbiasi la proporzione* MN: PQ:: MR : PV ; *le tre linee* MP, NQ, RV, *condotte per l' estremità di queste parallele, andranno a concorrere in un medesimo punto* S.

Sia *S* il punto di concorso di *MP* e di *NQ*, s il punto di concorso di *MP* e di *RV*. Il triangolo *SMN* essendo segato parallelemente alla sua base *MN* dalla retta *PQ*, darà (100) *SM*:*SP*:: *MN*: *PQ*; ed il triangolo *sMR* essendo segato parallelemente alla sua base dalla retta *PV*, darà parimente *sM*: *sP*::*MR*: *PV*. Ora (ip.) *MN*: *PQ*:: *MR*: *PV*; dunque si avrà *SM*: *SP*:: *sM*: *SP*: il che

dà, *dividendo* (Alg. 127) $SM-SP : SP :: sM-sP : sP$, cioè a dire, $PM : SP :: PM : sP$. Dunque, per essere $PM=PM$, si avrà $SP=sP$; e conseguentemente i punti S ed s si confondono.

Di quì segue la soluzione del problema seguente.

109. PROBLEMA III. *Da un punto dato* M (Fig. 76) *guidare una linea* MP *che tenda al punto di concorso di due linee* AB, CD, *allorchè questo punto è troppo lontano per poter esser determinato.*

Guido, pel punto M, la retta NR che incontri le linee AB, CD nei punti N ed R. Sopra NR costruisco un triangolo equilatero NSR. Da un punto qualunque Q, preso sopra AB, guido QV parallela ad NR: fo $Sq=QV$, e tiro qn parallela ad NR: dal punto S al punto M guido SM che incontri qn nel punto p: porto qp in QP sopra QV: pei punti M e P tiro la retta MP; questa linea tenderà al punto di concorso delle due linee AB, CD. Imperciocchè si ha (100) $NR : qn :: SN : Sq$. Dunque poichè $NR=SN$, si avrà $qn=Sq=QV$. Inoltre, si ha $NM : MR :: qp : pn$, ovvero $NM : MR :: QP : PV$. Dunque le tre linee MP, AB CD vanno a concorrere in un medesimo punto.

Della similitudine delle figure.

110 Si chiamano *figure* o *poligoni simili*, due poligoni che hanno il medesimo numero di angoli eguali ciascuno a ciascuno, ed i lati proporzionali intorno a questi angoli eguali. Così, i due pentagoni $ABCDE$, $abcde$ (Fig. 77 e 78) saranno simili, se gli angoli A ed a, B e b, C e c, D ed d, E ed e sono eguali ciascuno a ciascuno, e se inoltre si ha questa serie di rapporti eguali $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: EA : ea$.

Gli angoli corrispondenti A ed a, B, e b, C, e c, ec. si chiamano *angoli omologhi*; i lati AB ed ab, BC e bc, CD e cd, ec. che terminano ad angoli omologhi, o che formano gli angoli omologhi, si chiamano *lati omologhi.*

111. TEOREMA IV. *Due triangoli*, ABC abc (Fig. 79 e 80) *sono simili, quando hanno due angoli eguali ciascuno a ciascuno.*

Secondo la definizione precedente, due triangoli simili devono avere tutti gli angoli eguali ciascuno a ciascuno, ed i lati proporzionali intorno a questi angoli. Ora, i due triangoli che hanno due angoli eguali ciascuno a ciascuno, hanno tutti gli angoli eguali ciascuno a ciascuno (77). Resta dunque soltanto da dimostrarsi che questi due medesimi triangoli hanno i lati omologhi proporzionali.

Porto il lato bc sopra il suo omologo BC, da B in m: i due angoli b e B essendo eguali ba, avrà la medesima direzione di BA; e se presa $Bn=ba$, in seguito si guidi nm, i due triangoli Bnm, bac saranno perfettamente eguali (51), come aventi un angolo eguale compreso fra lati eguali ciascuno a ciascuno. Dunque l'angolo $Bnm=$ all'angolo BAC, e l'angolo $Bmn=$ all'angolo BCA. Dunque mn è parallela a CA, e per conseguenza si ha (100) $BA : BC :: Bn$ ovvero $ba : Bm$ o $bc :: AC : nm$ o ac.

112. COROLLARIO I. Due triangoli isosceli sono simili quando hanno solamente due angoli omologhi eguali: cioè a dire, o l'angolo del vertice eguale all'angolo del vertice, o uno degli angoli della base eguale ad uno degli angoli della base; perciocchè allora (75) essi hanno tutti gli angoli eguali ciascuno a ciascuno.

Tutti i triangoli equilateri sono simili, siccome equiangoli.

113. COROLLARIO II. Due triangoli ABC abc

(Fig. 81 e 82), sono simili, quando hanno i lati paralleli ciascuno a ciascuno. Imperciocchè essendo *ab* parallelo ad AB, se si prolunga *cb* sino all' incontro di AB, i due angoli *abc*, *Apc* saranno uguali (66. n.° 1): similmente le due linee *pc*, *BC* essendo parallele, i due angoli *Apc*, ABC sono eguali; dunque i due angoli *b* e *B* sono eguali. Il medesimo ragionamento vale per gli altri angoli.

114. COROLLARIO III. Due triangoli sono simili, quando hanno i lati perpendicolari ciascuno a ciascuno. Imperciocchè siano i due triangoli ABC, *DEF* (Fig. 83) tali che *DF* sia perpendicolare ad AC; ED prolungata sia perpendicolare ad *AB*; ed *EF* sia perpendicolare a *BC* prolungata: questi due triangoli sono equiangoli. Difatti 1.° I due triangoli rettangoli *KMC*, *KOF*, che hanno l' angolo comune *K*, e gli angoli *M* ed *O* retti sono equiangoli; dunque l' angolo *KCM* o *BCA*= all' angolo *KFO* o DFE. 2.° I due triangoli rettangoli *HOE*, *HNB*, che hanno gli angoli *OHE*, *NHB* eguali (58), e gli angoli *O* ed *N* retti, sono equiangoli; dunque l'angolo *HEO* o *DEF*= all' angolo *NBH* o *ABC*. Dunque i due triangoli DEF, *ABC* sono simili, poichè hanno due angoli eguali ciascuno a ciascuno.

115. Osservazione. Si osserverà, a proposito di queste sorti di triangoli, che i lati omologhi sono perpendicolari l' uno all' altro.

Osserveremo ancora che la perpendicolarità reciproca di tutti i lati dei due triangoli è necessaria, per poterne concludere che questi due triangoli sono simili. Se un triangolo avesse solamente due lati perpendicolari sopra due lati d' un altro triangolo, non si potrebbe da ciò concludere che essi sono simili.

116. TEOREMA V. *Due triangoli sono simili, allorchè hanno un angolo eguale compreso fra' lati proporziali.*

Due triangoli che hanno un angolo eguale compreso fra i lati proporzionali, possono essere rappresentati dai due triangoli ABC, ADE (Fig. 84), che hanno l'angolo comune A, e nei quali si ha la proporzione, AB : AD : : AC : AE. Ora, a motivo di questa proporzione, le basi BC, DE sono parallele (100); dunque i due triangoli ABC, ADE hanno tutti gli angoli eguali ciascuno a ciascuno, e sono per conseguenza simili.

117. TEOREMA VI. *Due triangoli* ABC, GHK (Fig. 84 e 85) *sono simili, allorchè hanno i lati proporzionali ciascuno a ciascuno; cioè a dire, allorchè si ha* AB : GH : : AC : GK : BC : : HK.

Prendo sulla AB, AD=GH; e, sulla AC, AE =GK; poi tiro DE. Poichè si ha AB : GH : : AC : GK, si avrà eziandio AB : AD : : AC : AE; dunque (100) DE è parallela a BC, ed il triangolo ADE è simile al triangolo ABC. Ma da un altro canto essendo DE parallela a BC, si ha (100), AB : AD : : BC : DE; dunque, poichè (ip.) AB : GH o AD : : BC : HK, si avrà BC : DE : : BC : HK; dunque DE=HK; dunque i due triangoli ADE, GHK sono perfettamente eguali (54), come aventi i tre lati eguali ciascuno a ciascuno. Ora, il triangolo ADE è simile al triangolo ABC; dunque anche il triangolo GHK è simile al triangolo ABC.

118. SCOLIO. Dai tre ultimi teoremi seguono tre maniere di costruire un triangolo simile ad un triangolo dato ABC (Fig. 79).

I. Sopra una linea indefinita (Fig. 80), prendete *bc* di grandezza data o arbitraria; fate (30) in *b* e *c* gli angoli *abc*, *acb* eguali ciascuno a ciascuno degli angoli ABC, ACB: il triangolo *abc* sarà simile ad ABC.

II. Prendete (Fig. 84) sulla AB, prolungata se è necessario, AD di grandezza data o arbitraria, e guidate DE parallela a BC: il triangolo ADE sarà simile al triangolo ABC.

III. Prendete (Fig. 85) una retta GH di grandezza data o arbitraria, e cercate (106) due quarte proporzionali: una alle tre linee AB, AC, GH: l' altra alle tre linee AB, BC, GH: suppongo che GK ed HK siano queste due quarte proporzionali. Dal punto G, come centro, col raggio GK, descrivete un arco di cerchio; dal punto H, come centro, col raggio HK, descrivete un secondo arco di cerchio che segherà il primo in un punto K: il triangolo GHK sarà simile al triangolo ABC.

119. TEOREMA VII. *Due poligoni* ACBDE, *abcde* (Fig. 86 e 87), *composti d' un medesimo numero di triangoli* OAB *ed* oab, OBC *ed* obc *ec., simili ciascuno a ciascuno e similmente disposti, sono simili.*

Imperciocchè, 1.° Gli angoli OAE, OAB, OBA, OBC, *ec.* essendo eguali ciascuno a ciascuno degli angoli *oae*, *oab*, *oba*, *obc*, *ec.*: egli è evidente che gli angoli A, B, C, *ec.*, *a*, *b*, *c*, *ec.* dei poligoni, sono composti d' angoli eguali ciascuno a ciascuno, e che per conseguenza i due poligoni sono equiangoli. 2.° I triangoli simili OAB: *oab*, danno AB : *ab* : : OB : *ob*; ed i triangoli simili OBC, *obc*, danno OB : *ob* : : BC : *bc*. Dunque AB : *ab* : : BC : *bc*. I triangoli simili OBC, *obc*, danno OB : *ob* : : BC : *bc* : : OC : *oc*; ed i triangoli simili OCD, *ocd*, danno OC : *oc* : : CD : *cd*. Dunque BC : *bc* : : CD : *cd*. Si avrà quindi Ab : *ab* : : BC : *bc* : : CD : *cd*; così di seguito. Dunque i nostri due poligoni hanno i lati proporzionali intorno agli angoli eguali, e sono per conseguenza simili.

120. Osservazione. I punti O ed *o* possono essere situati dentro i due poligoni, come nelle Figure 86. e 87; o cadere sopra i vertici A ed *a* di due angoli corrispondenti; ovvero sopra due lati corrispondenti, AB, *ab*, in luoghi corrispondenti,

come alla metà, al terzo, al quarto, ec. di questi lati.

121. TEOREMA VIII. *Due poligoni regolari* ABCDEF, *abcdef* (Fig. 88 e 89), *che hanno il medesimo numero di lati, sono simili.*

Innalzate sopra il mezzo de' lati AB, BC le perpendicolari MO, NO, che s' incontrino in O: da questo punto O, come centro, col raggio OB, descrivete una circonferenza di cerchio; questa circonferenza passerà per tutti gli angoli del poligono regolare ABCDEF. Perciocchè primieramente (81) ella passa pei tre punti A, B, C; e per conseguenza i due triangoli OAB, OBC sono isosceli, e di più perfettamente uguali a motivo di AB=BC. Il triangolo OCD è altresì isoscele, e perfettamente uguale al triangolo OBC; perciocchè, a motivo dei triangoli isosceli perfettamente eguali OAB, OBC, gli angoli OBA, OBC, OCB sono ciascuno la metà degli angoli eguali ABC, BCD; dunque l' angolo OCD è uguale all' angolo OCB, e per conseguenza i due triangoli OCD, OCB sono perfettamente uguali (51), come aventi il lato comune OC, il lato CD eguale al lato CB, e l' angolo OCD eguale all' angolo OCB. Si dimostrerà nella stessa maniera che il triangolo ODC è perfettamente uguale al triangolo ODC; così di seguito dall' uno all' altro. Dunque tutte le rette OA, OB, OC, OD OE, ec. sono uguali fra loro, e sono per conseguenza i raggi d' un medesimo circolo, la cui circonferenza passa pei vertici di tutti gli angoli del poligono. Similmente i vertici di tutti gli angoli del secondo poligono regolare *abcdef* sono situati sopra la circonferenza d' un cerchio, il cui centro o è nel punto di concorso delle due perpendicolari *mo*, *no*, alzate sopra il mezzo dei lati *ab*, *bc*.

Ciò posto, si vede che tutti i triangoli isosceli OAB ed *oab*, OBC e *obc*, *ec.* sono simili; poichè

gli angoli al vertice sono eguali, come aventi per misura degli archi d'uno stesso numero di gradi. Onde ne risulta che i due poligoni sono simili.

122. COROLLARIO. Due cerchi X ed Y possono essere considerati come due poligoni regolari d'un medesimo numero infinito di lati; perciocchè se s'immagina che il numero dei lati dei due poligoni regolari ABCDEF, *abcdef*, iscritti in questi cerchi, aumenti all'infinito, egli è chiaro che i contorni di questi poligoni finiranno col confondersi colle due circonferenze. Per conseguenza tutti i cerchi, in generale, sono figure simili (*).

123. TEOREMA IX. *In due triangoli simili ABC abc* (Fig. 79 e 80), *la somma dei tre lati di uno sta alla somma dei tre lati dell'altro, ovvero la somma di due lati di uno sta alla somma dei due lati omologhi dell'altro, come un lato qualunque del primo sta al lato omologo del secondo.*

Imperciocchè i due triangoli ABC, *abc* essendo simili, si ha questa serie di rapporti eguali, AB: *ab*: : AC: *ac*: : BC: *bc*; d'onde si ricava (Alg. 128).

$$\left.\begin{array}{l}AB+AC+BC:ab+ac+bc\\ AB+AC:ab+ac\\ AB+BC:ab+bc\\ AC+BC:ac+bc\end{array}\right\}::AB:ab::AC:ac::BC:bc.$$

124. TEOREMA X. *In due poligoni simili ABCDE, abcde* (Fig. 77 e 78), *i circuiti intieri, o le porzioni corrispondenti de' circuiti, sono fra loro come due lati omologhi.*

Imperciocchè i due poligoni ABCDE, *abcde* essendo simili, si ha questa serie di rapporti eguali, AB: *ab*: : BC: *bc*: : CD: *cd*: : DE: *de*: : EA: *ea*; dunque (Alg. 128).

(*) *Vedi la Nota seconda alla fine del Capo.*

$$\left.\begin{array}{l} AB+BC+CD+DE+EA:ab+bc+cd+de+ea \\ AB+BC+CD+DE:ab+bc+cd+de \\ AB+BC+CD \quad :ab+bc+cd \\ \text{ec.} \end{array}\right\} :: \left\{\begin{array}{l} AB:ab:: \\ BC:bc:: \\ \text{ec.} \end{array}\right.$$

125. COROLLARIO I. I circuiti intieri e le porzioni corrispondenti de' circuiti di due poligoni regolari d' un medesimo numero di lati (Fig. 88 e 89), sono fra loro come due lati omologhi; poichè questi due poligoni e le loro parti corrispondenti sono simili (121).

126. COROLLARIO II. Le circonferenze intiere, e le porzioni corrispondenti di circonferenze di due cerchi, sono fra loro come i raggi o i diametri di questi cerchi. Imperciocchè due cerchi possono essere considerati (122) come due poligoni regolari d' un medesimo numero infinito di lati, e due lati corrispondenti sono fra loro come i raggi o i diametri, essendo le basi di due triangoli isosceli simili

127. Osservazione. Si chiamano *archi simili*, gli archi corrispondenti ASB, *asb*, cioè a dire, gli archi del medesimo numero di gradi; e *settori simili*, le porzioni di cerchi AOBS, *aobs*, comprese fra gli archi simili ed i raggi che terminano alle loro estremità.

Delle linee segate in ragione reciproca.

128. Due linee AB, DE (Fig. 90) sono segate *in ragione reciproca*, allorchè una parte AC della prima linea sta ad una parte DF della seconda, come l'altra parte FE della seconda linea sta all' all'altra parte CB della prima: ovvero, allorchè una parte AC della prima linea sta ad una parte DF della seconda, come la seconda linea intera DE sta

alla prima linea intera AB; il che fa due casi.

Nel primo, cioè a dire, allorchè si ha AC : DF : : FE : CB, si dice che *le due linee sono segate in parti reciprocamente proporzionali*: le due parti d'una linea formano gli estremi della proporzione, e le due parti dell'altra formano i medj. Nel secondo caso, cioè a dire, allorchè si ha AB : DE : : DF : AC, si dice che *le due linee sono reciprocamente proporzionali alle loro parti*. Allora una linea intera, ed una delle sue parti formano gli estremi della proporzione, mentre l'altra linea intera ed una delle sue parti formano i medj.

129. TEOREMA XI. *Due corde AB, DE* (Fig. 91) *d'un cerchio che si tagliano in O, si tagliano in parti reciprocamente proporzionali.*

Guidate le corde AE, DB. I due triangoli AOE, DOB sono simili; poichè gli angoli O opposti al vertice, sono eguali, e gli angoli E, B hanno ciascuno per misura la metà dell'arco AD (85). Dunque AO : DO : : OE : OB.

130. COROLLARIO I. Supponiamo (Fig. 92) che la corda AB passi pel centro, ovvero che sia un diametro del cerchio, e che la corda DE gli sia perpendicolare. Allora (78) la corda DE è segata in due parti eguali al punto O; e la proporzione precedente diventa, AO : DO o OE : : DO o OE : OB. Laonde si vede che la metà DO o OE della corda DE è media proporzionale fra i segmenti AO, OB del diametro.

Si chiama *ordinata* al diametro AB, la perpendicolare DO o OE; ed *ascisse* i segmenti AO, OB del diametro.

131. COROLLARIO II. Dalla proporzione continua ∺ AO : DO : OB, la quale ha luogo (Fig. 92), segue che nel cerchio, il *quadrato dell'ordinata è eguale al prodotto delle ascisse corrispondenti del diametro.*

Questa stessa proprietà del cerchio somministra la soluzione del problema seguente.

132. PROBLEMA IV. *Trovare una media proporzionale fra due linee date AO, OB* (Fig. 95).

Mettete queste linee l'una di seguito all' altra (Fig. 92); dividete (44) la somma AB in due parti eguali al punto C; da questo punto, col raggio CA, o CB, descrivete il cerchio ADBE, alzate (45) al punto O perpendicolarmente ad AB l' ordinata DO: questa linea sarà la media proporzionale cercata.

133. TEOREMA XII. *Se da un punto A esterno al circolo* (Fig. 94) *si guidano due rette AB, AD, che seghino ciascuna la circonferenza in due punti: le secanti intere saranno reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne al circolo*; *cioè a dire, si avrà AB : AD : : AE : AC.*

Guidate le corde BE, DC. I due triangoli ABE, ADC sono simili, poichè hanno l'angolo A comune, e inoltre gli angoli B e D, che hanno i loro vertici alla circonferenza, e si appoggiano sopra il medesimo arco, sono eguali. Dunque si ha AB : AD : : AE : AC.

134. COROLLARIO I. Immaginiamoci che la secante AB rimanendo immobile, si faccia girare l'altra secante AD intorno al punto A, di modo che l' angolo BAD ingrandendosi continuamente, il punto D venga per fine a confondersi col punto E (Fig. 95). Allora AD diventa tangente al cerchio, e si ha AB : AD : : AD : AC. Laonde si vede che, *se da un medesimo punto si guidano una secante ed una tangente allo stesso cerchio, la tangente è media proporzionale fra la secante e la sua parte esterna al circolo.*

135. COROLLARIO II. Di quì ne segue una seconda maniera di trovare una media proporzionale fra due linee date MN, KII (Fig. 96). Sopra la

maggiore MN porto la seconda KH da M in O. Dal punto C, mezzo della loro differenza ON, descrivo il semicircolo OZN: dal punto S, mezzo di MC, descrivo un altro semicircolo MZC: dal punto M al punto Z, intersezione delle due semicirconferenze, tiro la retta MZ, e dico che questa linea è la media proporzionale cercata. Imperciocchè, conducendo il raggio CZ, si vedrà che l'angolo MZC è retto (86), come avente il suo vertice alla semicirconferenza MZC, ed appoggiantesi sul diametro MC. Dunque MZ è perpendicolare al raggio ZC, ovvero è tangente alla semicirconferenza OZN (91); e per conseguenza si ha MN : MZ : : MZ : MO o KH.

Nota I. all' artic. 100.

I. Qualora le linee AC, AE (Fig. 69) siano *commensurabili*, cioè quando il rapporto dell' una all' altra possa esprimersi per via di *numeri razionali*, non v' ha dubbio che potrà sempre la AC concepirsi divisa in numero tale di parti eguali, onde uno de' punti di divisione cada precisamente in E : sicchè, per questa ipotesi, la dimostrazione recata nel testo, non va soggetta a difficoltà.

II. Ma si vedrà più sotto che due linee AC, AE possono talvolta non avere nessuna misura comune, comecchè piccolissima. E in tal circostanza è evidente, che per quanto si moltiplichi il numero delle divisioni della AC, niuna andrà mai a coincidere con E : che in conseguenza rimane necessariamente escluso il principio su cui riposa il ragionamento dell' Autore.

III. A provare, anche per questo caso dell' *incommensurabilità*, l' esatta verità del teorema, osservisi che, posta la DE parallela al lato BC, in due modi soli può avvenire che non sia giu-



sta la proporzione AB : AD :: AC : AE ; vale a dire, o per essere il quarto termine AE maggiore di quel che dovrebbe; oppure per esserne minore. Immaginisi dapprima maggiore, e sia Ee l'eccesso. In tale ipotesi avrassi AB : AD :: AC : Ae, ossia AB : AC :: AD : Ae. D'altronde, poichè i punti E, e giacciono ad una certa distanza fra loro, comunque piccola voglia tenersi, è chiaro, che col dividere la linea AC successivamente in due, in quattro, in otto ec. parti, si arriverà infine a spezzarla in porzioni, ciascuna delle quali sia minore della stessa Ee; cioè si giugnerà a far cadere un qualche punto di divisione *f* nell' intervallo Ee. Da questo punto *f* si concepisca condotta la *fd*, parallela a DE ed a BC. Essendo, per supposizione, le due linee AC, A*f* *commensurabili*, si verificherà necessariamente la proporzione AB : A*d* :: AC : A*f*, ossia AB : AC :: A*d* : A*f*; e come s'è già assunta la stessa ragione AB : AC eguale all' altra AD : A*e*, s'avrà per ultimo A*d* : A*f* :: AD : A*e*, ossia A*d* : AD :: A*f* : A*e*. Conclusione palesemente assurda, e che dà quindi a conoscere che le tre linee AB, AD, AC non possono avere per quarta proporzionale nessuna linea minore di AE.

IV. Si proverà con pari facilità che lo stesso inconveniente avrebbe pur luogo, assumendosi per ultimo termine della proporzione una linea maggiore di AE. Così rimane dimostrato in generale che la sola AE, quand'anche non si trovi in rapporto *commensurabili* colla AC, può verificare la proporzione accennata.

Nota II. all' artic. 122.

Le considerazioni tratte dall' infinito, delle quali si fa uso in questo articolo e in parecchi altri

luoghi del presente Compendio, non possono utilmente impiegarsi che con molta cautela; e sarebbe desiderabile che l'Autore si fosse astenuto affatto da questo genere di prove, in un'Opera consecrata all'istruzione de' Principianti. Se esse accorciano da un canto le dimostrazioni, si perde dall'altro in evidenza assai più che non si guadagna in brevità; e si toglie in certo modo alla Geometria, uno de' suoi caratteri essenziali.

Il contorno di un poligono iscritto al circolo, comunque si moltiplichi il numero de' suoi lati, non va mai a confondersi colla circonferenza del circolo stesso. Questa non è propriamente che il limite cui s'approssima di continuo il perimetro del poligono, senza toccarlo giammai: in quella guisa medesima, per cui si avvertì altrove (not. all'artic. 143 dell'Algeb.) che la somma indefinita de' termini d'una progressione geometrica decrescente, può accostarsi, quanto vogliasi ad un certo valore.

Sostituendo questo concetto all'altro meno esatto cui presentano le espressioni del testo, si arriva egualmente ai risultati degli articoli 126. e 162., senza dipartirsi punto dal metodo rigoroso di ragionare che si costuma nell'altre parti delle Matematiche. In vece di rappresentarsi il circolo come un poligono d'infiniti lati, basta ritenere 1.° che è diminuibile oltre ogni data misura la differenza tra la periferia del circolo stesso e il contorno di un poligono iscritto di cui possono moltiplicarsi i lati ad arbitrio: 2.° che *due quantità determinate A, B star debbon tra loro in quel rapporto medesimo in cui trovansi costantemente due quantità variabili x, y aventi per limiti le due prime.*

CAPO VI.

Misura e paragone delle superficie dei poligoni.

Misura delle superficie.

136. Misurare la superficie o l'*area* d' un poligono, è cercare quante volte essa contiene un' altra superficie riguardata come unità.

137. La superficie di cui abbiamo naturalmente l'idea la più chiara, e che conviene in conseguenza di prendere per unità, è il quadrato; perciocchè esso è composto di quattro lati eguali e di quattro angoli retti. Ora, in primo luogo, il rapporto de' suoi lati è il più semplice di tutti; ed in secondo luogo, l' angolo retto è quello che noi ci rappresentiamo più facilmente, per l' abitudine in cui siamo di vedere gli oggetti ritti, o di veder cadere i corpi secondo la linea a piombo, ec. Egli è vero che il triangolo ha meno lati e meno angoli del quadrato: ma se i tre lati d' un triangolo possono essere uguali, esso non può avere (70) più d' un angolo retto; ed un angolo obbliquo non si dipinge giammai, all' immaginazione, in una maniera ben distinta. Il quadrato è dunque preferibile al triangolo e ad ogni altra figura, per servire di unità nella misura delle superficie. Quindi i Geometri, d' un comune accordo, adottarono il quadrato per unità nella misura delle superficie; e di quì hanno formata l' espressione *quadratura d'una superficie o d' una figura*, colla quale intendono la determinazione o la valutazione di questa figura in quadrati.

Prima di venire alla quadratura dei poligoni

rettilinei, cominciamo a dare alcune definizioni.

138. Si chiama *altezza* d' un parallelogrammo ABCD (Fig. 97), o d' un triangolo ABC (Fig. 98), la perpendicolare AO abbassata da un angolo A sul lato opposto BC. Il lato su cui cade la perpendicolare, dicesi *base* del parallelogrammo o del triangolo. Nel rettangolo l' altezza si confonde col lato AB, perchè allora AB è perpendicolare sopra BC.

Si vede che due parallelogrammi ABCD, MNPQ (Fig. 97), che hanno delle altezze eguali AO, MR; o due triangoli ABC, MNP (Fig. 98), che hanno parimente delle altezze uguali AO, MR, possono sempre essere supposti compresi fra le stesse parallele; poichè due linee parallele sono dapertutto equidistanti l' una dall' altra (62).

139. TEOREMA I. *Ogni parallelogrammo ABCD (Fig. 99 e 100) è uguale ad un rettangolo EBCF della stessa base e della medesima altezza.*

Nel parallelogrammo ABCD, si ha (76) AB=DC, AD=BC: e medesimamente nel rettangolo EBCF, si ha EB=FC, EF=BC. Dunque AD=EF. Levando (Fig. 99) o aggiungendo (Fig. 100) la porzione AF dall' una e dall' altra parte, si avrà EA =FD. Dunque i due triangoli FCD, EBA hanno i tre lati eguali, ciascuno a ciascuno, e sono quindi perfettamente eguali. Aggiugnendo a ciascuno di essi il trapezio ABCF (Fig. 99), o sottraendo il triangolo FKA, ed aggiungendo il triangolo BKC (Fig. 100), si avrà il parallelogrammo ABCD eguale al rettangolo EBCF.

140. COROLLARIO I. Dunque, se i due parallelogrammi ABCD, MNPQ (Fig. 97), che hanno delle altezze uguali, hanno di più la medesima base, o, ciò che torna allo stesso, delle basi eguali BC, NP, essi avranno anche superficie uguali, comunque differenti possano essere i loro

angoli. Imperciocchè ciascuno di essi è uguale ad un rettangolo della stessa base e della medesima altezza.

141. COROLLARIO II. Ogni triangolo ABC (Fig. 99 e 100) può essere considerato come la metà del parallelogrammo ABCD, che ha la medesima base e la medesima altezza di esso. Dunque, poichè questo parallelogrammo è uguale al rettangolo EBCF, della stessa base e della medesima altezza, ne segue che ogni triangolo è la metà d' un rettangolo della stessa base e della medesima altezza di esso.

142. COROLLARIO III. Dunque, se i due triangoli ABC, MNP, (Fig. 98), che hanno delle altezze uguali, hanno di più le loro basi BC, NP eguali; essi avranno superficie eguali, comunque differenti possano essere i loro angoli. Imperciocchè, per l'articolo precedente, ciascuno di essi è la metà d' un rettangolo della stessa base e della medesima altezza.

Da queste proposizioni si scorge che, quando si saprà trovare la superficie d' un rettangolo, si saprà trovare eziandio quella d' un parallelogrammo qualunque, e quella d' un triangolo qualunque.

143. TEOREMA II. *La superficie d' un rettangolo EBCF* (Fig. 101.) *è uguale al prodotto della sua base e della sua altezza, il che si esprime così* : $EBCF = BC \times BE$.

Il senso di questo ennunziato si è, che prendendo una certa misura, il piede, per esempio, per unità lineare, e questa misura essendo contenuta, se si vuole, 15 volte nella base BC del rettangolo, e 12 volte nella sua altezza BE, la superficie di questo rettangolo conterrà 15×12 ossia 180 piedi quadrati, cioè a dire, 180 quadrati che hanno ciascuno un piede di lato.

Siano, sopra la base BC, le parti B*f*, *fg*, *gh*, ec.

ec. le unità di linea: e sopra l'altezza BE, le parti Bm, mn, nq, ec. parimente le unità di linea. Ciò posto, 1.° da tutti i punti f, g, h ec. della base, guidate delle parallele all'altezza BE; il rettangolo EBCF si troverà diviso in rettangoli che hanno tutti la medesima altezza di esso, e per basi le unità di linea; ed il numero di questi rettangoli parziali o elementari è quello delle divisioni della base BC. 2.° Da tutti i punti m, n, q ec. dell'altezza, guidate delle parallele alla base BC; ciascun rettangolo parziale sarà diviso in altrettanti quadrati che hanno le unità di linea per lati, quante sono le divisioni nell'altezza. Dunque, per avere il numero dei quadrati contenuti nella superficie del rettangolo totale EBCF, bisogna ripetere il numero dei rettangoli elementari, ossia il numero delle divisioni della base BC, tante volte, quante sono le divisioni dell'altezza BE. Dunque questa superficie è espressa da BC×BE.

Se l'unità di linea non è contenuta esattamente nella base BC o nell'altezza BE, potrà trovarsi nell'espressione della superficie EBCF, una frazione di quadrato, che si valuterà, se si giudica a proposito, in misure quadrate d'un ordine inferiore.

144. COROLLARIO I. Dunque (139) la superficie del parallelogrammo qualunque ABCD Fig. 97) =BC×AO. Quindi, se la base BC=25 piedi, l'altezza $AO=17\frac{1}{2}$ piedi; la superficie ABCD sarà di $457\frac{1}{2}$ piedi quadrati.

145. COROLLARIO II. Dunque la superficie del triangolo ABC (Fig. 98.)= $\frac{BC\times AO}{2}$. Quindi, se

BC=25 piedi, $AO=17\frac{1}{2}$ piedi; la superficie $ABC=218\frac{3}{4}$ piedi quadrati.

146. COROLLARIO III. Due parallelogrammi ABCD, MNPQ (Fig. 97) che hanno la medesima altezza, sono tra loro come le basi BC, NP. Imperciocchè ABCD : MNPQ : : BC×AO : NP×MR. Ora, poichè AO=MR, se si dividono i prodotti BC×AO, NP×MR per queste quantità uguali, il loro rapporto rimarrà sempre lo stesso (Alg. 130). Dunque ABCD MNPQ : : BC : NP.

Per la stessa ragione, due triangoli ABC, MNP (Fig. 98) che hanno la medesima altezza, sono tra loro come le due basi BC, NP; perocchè sono metà de' parallelogrammi che hanno le medesime basi e le stesse altezze, e le metà sono fra loro come i tutti.

Si può dire, sempre per le stesse ragioni, che due parallelogrammi o due triangoli che avessero delle basi eguali, sarebbero tra loro come le altezze.

147. PROBLEMA I. *Costruire un quadrato eguale in superficie ad un parallelogrammo o ad un triangolo.*

1.° Cercate (132) una media proporzionale fra la base BC e l' altezza AO del parallelogrammo qualunque ABCD (Fig. 99 e 100): formate un quadrato che abbia per lato questa media proporzionale: esso sarà uguale in superficie al parallelogrammo; poichè questo quadrato ha per valore BC ×AO, espressione della superficie del parallelogrammo.

2.° Cercate una media proporzionale fra la base BC e la metà dell' altezza del triangolo ABC

(Fig. 99): formate un quadrato che abbia per lato questa media proporzionale, esso sarà uguale in superficie al triangolo: poichè questo quadrato ha per valore $BC \times \frac{AO}{2}$, espressione della superficie del triangolo.

148. PROBLEMA II. *Determinare la superficie d' un trapezio* ABCD (Fig. 102.).

Conduco la diagonale AC, la quale divide il trapezio in due triangoli ABC, CAD, che si possono riguardare come aventi per altezza comune la perpendicolare AO, abbassata dall' angolo A sopra il lato BC che è parallelo ad AD. Quindi la somma della superficie di questi triangoli, ossia la superficie del trapezio . . . .

$$= \frac{BC \times AO}{2} + \frac{AD \times AO}{2} = \frac{(AD+BC) \times AO}{2}.$$

Laonde si vede che *la superficie d' un trapezio è uguale alla metà del prodotto della somma de' suoi due lati paralleli per la distanza di questi lati.*

149. COROLLARIO I. Se dal punto M, mezzo di AB, conducasi la retta MN parallela a BC o ad AD, i triangoli simili AMP, ABO daranno AM : AB :: MP : BO :: AP : AO; dunque $MP = \frac{BO}{2}$, $AP = \frac{AO}{2}$. Da un altro canto, se si abbassa DK perpendicolare sopra BC, si avrà (62) DK = AO, SK = PO, DS = AP; e (100) DS o AP : DK o AO :: SN : KC; dunque $SN = \frac{KC}{2}$. Per conseguenza $MP + PS + SN = \frac{BO}{2} + KO + \frac{KC}{2} = \frac{BO}{2}$

$+\frac{OK}{2}+\frac{AD}{2}+\frac{KC}{2}$; cioè a dire $MN=\frac{BC+AD}{2}$.

Dunque l'area del trapezio ha ancora per espressione $MN\times AO$, cioè a dire, il prodotto della sezione media MN parallela ai due lati paralleli per la distanza di questi lati.

150. COROLLARIO II. Supponiamo che sopra la retta AE (Fig. 103), s'innalzi un numero qualunque di perpendicolari AF, BG, CH, DK, EI: ed in seguito si conducano le rette EG, GH, HK, KI; la somma di tutti i trapezj AFGB, BGHC, ec. avrà per valore . . . .

$$\frac{(AF+BG)\times AB}{2}+\frac{(BG+CH)\times BC}{2}+$$

$$\frac{(CH+DK)\times CD}{2}+\frac{(DK+EI)\times DE}{2}.$$

Allorchè tutte le parti AB, BC, CD, DE della base sono eguali, questa espressione può cangiarsi in quest' altra . . . .

$$\frac{AB\times(AF+BG+BG+CH+CH+DK+DK+EI)}{2}$$

la quale si riduce ad . . . .

$$AB\times\left(BG+CH+DK+\frac{AF+EI}{2}\right).$$

Laonde si vede che, *per avere la superficie d' una serie di trapezj le cui basi* AB, BC, ec. *siano eguali, bisogna moltiplicare una di queste basi per lo fattore risultante dalla somma delle perpendicolari intermedie e della metà della somma delle perpendicolari estreme.*

Così, per esempio, se si supponga che ciascuna delle divisioni AB, BC, CD, ec. sia di 1 tesa, ed AF=10 tese, BG=11 tese, CH=9 tese, DK=12

tese, EI=16 tese: la superficie AEIKHGF sarà di 45 tese quadrate.

Vi sono dei Pratici che nel caso di cui trattasi, aggiungono insieme tutte le perpendicolari AF, BG, CH, ec.; dividono la somma de' loro valori pel loro numero, a fine di avere ciò che chiamano un' *altezza ridotta*; poi moltiplicano quest' altezza per la base AE, per avere la superficie AEIKHGF. Seguendo questa pratica, si troverebbe che nell' ipotesi proposta, la superficie AEIKHGF è di $46\frac{2}{5}$ tese quadrate: risultato che differisce dal precedente, e che è per conseguenza inesatto.

151. PROBLEMA III. *Determinare la superficie d' un poligono qualunque ABCDE* (Fig. 104.).

Conduco da un angolo A di questo poligono delle diagonali AC, DA agli angoli C, D; il che divide il poligono in triangoli ABC, ACD, ADE. Dal medesimo angolo A, abbasso sopra le basi BC, CD, DE di questi triangoli, prolungate, se è necessario, le perpendicolari AG, AH, AI. La superficie del poligono essendo eguale alla somma delle superficie di tutt' i triangoli proposti avrà per espressione . . . .

$$\frac{BC\times AG}{2}+\frac{CD\times AH}{2}+\frac{DE\times AI}{2}.$$

Egli è chiaro che si può determinare egualmente la superficie del poligono, conducendo da un punto O, preso arbitrariamente dentro il poligono ABCDE (Fig. 105), le rette OA, OB, OC, ec. a tutti gli angoli: poi aggiungendo insieme le espressioni di tutti i triangoli OAB, OBC, OCD, ec.

152. Osservazione. Il metodo precedente, serve generalmente a trovare la superficie d' ogni sorta

di poligoni rettilinei. Ma per rapporto a' poligoni regolari, esso è suscettibile di abbreviazione, come siamo per vedere.

153. PROBLEMA IV. *Determinare la superficie d' un poligono regolare* ABCDEF (Fig. 88.).

Abbiamo veduto (121) che si può sempre circoscrivere un cerchio ad un poligono regolare. Sia O il centro del cerchio circoscritto al poligono proposto, e s' intendano guidati a tutt' i suoi angoli i raggi OA, OB, OC, ec. Tutti i triangoli isosceli OAB, OBC, OCD, ec. sono perfettamente eguali; e per conseguenza la loro somma, o la superficie intera del poligono, è uguale alla metà del prodotto che si trova con moltiplicare la base d' uno di essi, presa tante volte quanti sono i lati del poligono, per l' altezza d' uno di questi triangoli; ovvero, ciò che torna allo stesso, uguale alla metà del prodotto del contorno del poligono, per la perpendicolare abbassata dal centro sopra uno de' suoi lati.

Si chiama *apotema* del poligono ciascuna delle perpendicolari eguali OM, ON, ec. abbassate dal centro sopra i suoi lati. Quindi *la superficie d' un poligono regolare è uguale alla metà del prodotto del suo contorno pel suo apotema.*

154. Osservazione. Se non si volesse avere che la superficie della porzione OABCDO, compresa fra la parte ABCD del perimetro, ed i raggi OA, OD, bisognerebbe prendere semplicemeete la somma dei triangoli OAB, OBC, OCD; e si avrebbe OABCDO

$$= \frac{(AB+BC+CD)\times OM}{2}.$$

155. COROLLARIO. La superficie d' un cerchio è uguale alla metà del prodotto della sua circonferenza pel raggio; e la superficie d' un settore di cerchio AOBS è uguale alla metà del prodotto del-

l' arco ASB pel raggio. Imperciocchè il cerchio è un poligono regolare d' una infinità di lati, il cui apotema è uguale al raggio (*).

156. Osservazione. Se si potesse trovare il valore esatto della circonferenza d' un cerchio, cioè a dire il rapporto esatto che essa ha col raggio, si avrebbe la *quadratura del cerchio*, ossia si potrebbe formare un quadrato eguale in superficie al circolo, poichè il lato di questo quadrato non è altra cosa che la media proporzionale fra il raggio e la semicirconferenza; linea che si troverebbe (132 o 135). Ma fin quì si è in vano cercato il rapporto esatto della circonferenza al raggio; noi lo determineremo in seguito per approssimazione.

Paragone delle superficie.

157. TEOREMA III. *Le superficie di due parallelogrammi ABCD, MNPQ* (Fig. 106 e 107) *che hanno gli angoli B ed N uguali (e per conseguenza anche tutti gli altri angoli eguali ciascuno a ciascuno) sono fra loro come i prodotti AB ×BC, MN×NP dei lati adiacenti a questi angoli eguali.*

Dagli angoli A ed M, abbassate le perpendicolari AO, MR, sopra i lati opposti BC, NP. I due triangoli rettangoli AOB, MRN sono simili, poichè oltre gli angoli retti eguali O ed R, essi hanno gli angoli B ed N eguali per ipotesi; dunque AO : MR :: AB : MN. Moltiplicando gli antecedenti per BC, ed i conseguenti per NP, si avrà (Alg. 130), AO×BC : MR×NP :: AB×BC : MN ×NP; proporzione, della quale i primi due termini esprimono (144) le superficie dei due pa-

(*) *Vedi la Nota alla fine del Capo.*

rallelogrammi, ed i due ultimi sono i prodotti dei lati adiacenti agli angoli eguali.

158. COROLLARIO. Lo stesso vale pei due triangoli ABC, MNP, che hanno gli angoli B ed N eguali: le loro superficie stanno tra loro come i prodotti AB×BC, MN×NP, dei lati adiacenti a questi angoli eguali; poichè questi due triangoli sono le metà dei parallelogrammi ABCD, MNPQ, e le metà stanno tra loro come i tutti.

159. TEOREMA IV. *Le superficie di due triangoli simili ABC, abc (Fig. 108 e 109) stanno tra loro, come i quadrati de' lati omologhi.*

Il senso di questo enunziato è, che passa il medesimo rapporto fra la superficie del triangolo ABC e quella del triangolo *abc*, il quale passa fra la superficie d'un quadrato che avesse, per esempio, AB per lato, e quella d'un quadrato che avesse *ab* per lato, essendo i lati AB, *ab* omologhi l'uno all'altro; il che si esprime così, ABC : *abc* :: $(AB)^2 : (ab)^2$.

Dagli angoli omologhi A ed *a* abbassate le perpendicolari AO, *ao* sopra i lati opposti BC, *bc*, prolungati, se è necessario. I due triangoli ABC, *abc* essendo simili ed i due triangoli rettangoli AOB, *aob* essendo altresì simili, si hanno le due seguenti proporzioni

$$BC : bc :: AB : ab$$
$$AO : ao :: AB : ab$$

dunque (Alg. 131) . . . .

$$BC \times AO : bc \times ao :: (AB)^2 : (ab)^2$$

Ora i due primi termini di quest'ultima proporzione sono (145) doppj delle superficie ABC, *abc*; dunque (prendendo le metà di questi due termini), si avrà . . . .

$$ABC : abc :: (AB)^2 : (ab)^2.$$

160. TEOREMA V. *Le superficie di due poligoni simili ABCDE*, abcde (*Fig.* 86 e 87), *e le parti corrispondenti di queste superficie stanno tra loro, come i quadrati de' lati omologhi.*

I due poligoni simili ABCDE, *abcde* sono composti (119) d' un medesimo numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno, OAB ed *oab*, OBC ed *obc*, OCD ed *ocd*, ec. Questi triangoli danno....

$$\begin{aligned} OAB : oab &:: (AB)^2 : (ab)^2 \\ OBC : obc &:: (BC)^2 : (bc)^2 \\ OCD : ocd &:: (CD)^2 : (cd)^2 \\ \text{ec.} & \end{aligned}$$

Ma da un altro canto, per la similitudine dei poligoni si ha.

$$AB : ab :: \left\{ \begin{array}{l} BC : bc \\ CD : cd \\ \text{ec.} \end{array} \right.$$

Dunque si avrà eziandio (Alg. 132.)

$$(AB)^2 : (ab)^2 :: \left\{ \begin{array}{l} (BC)^2 : (bc)^2 \\ (CD)^2 : (cd)^2 \\ \text{ec.} \end{array} \right.$$

Per conseguenza si avrà

$$\left. \begin{array}{l} OAB : oab \\ OBC : obc \\ OCD : ocd \\ \text{ec.} \end{array} \right\} :: (AB)^2 : (ab)^2.$$

Dunque (Alg. 128) la somma di tutti i triangoli OAB, OBC, ec., ossia la superficie del primo poligono, sta alla somma di tutti i triangoli *oab*, *obc*, ec., ossia alla superficie del secondo poligono, come il quadrato di AB al quadrato del lato omologo *ab*; e parimente la somma di un numero

qualunque di triangoli del primo poligono, sta alla somma d' un egual numero di triangoli corrispondenti del secondo, come il quadrato di AB al quadrato di *ab*.

161. COROLLARIO I. Le superficie di due poligoni regolari d' un medesimo numero di lati, e le parti corrispondenti di queste superficie, sono fra loro come i quadrati di due lati omologhi; poichè questi due poligoni sono simili (131).

162. COROLLARIO II. Le superficie di due circoli, e le superficie di due settori simili di circoli, stanno fra loro come i quadrati dei raggi; poichè queste figure sono simili ciascuna a ciascuna. (*)

Nota agli articoli 155, e 162.

Le proposizioni enunciate in questi due luoghi del testo, sono *rigorosamente vere*; ma il principio meno esatto onde si voglion dedurre, può di leggieri, per chi non conosce altra maniera di dimostrarle, dar luogo ad inganno, facendole tenere in conto di semplici *conghietture*, o tutto al più di plausibili *approssimazioni*. Anche quì, come più sopra (122 e 126), l'Autore sembra richiedere, quasi ipotesi essenziale, che il contorno del poligono vada infine a confondersi colla periferia del circolo: quando, al contrario, è manifestamente provato che l' uno rimaner dee mai sempre distinto dall'altra (Vedi la Nota II. al Capo precedente).

A prevenire i dubbj che può destare nella maggior parte dei Lettori un vizio si palese della dimostrazione recata nel testo, giova accennar qui brevemente le verità fondamentali su cui è d'uopo appoggiarla, onde concludere con rigorosa evi-

(*) *Vedi la Nota che segue.*

denza *eguali tra loro l' area del circolo e l' area del triangolo che abbia la periferia per base e per l' altezza il raggio.*

La prima di queste verità è, che quanto più s'accresce il numero de' lati del poligono iscritto al circolo, tanto più si avvicina all' area dell' uno quella dell' altro; e che la differenza loro può rendersi minore di qualsivoglia quantità determinata: che *cioè l'area del circolo è il limite dell' area variabile del poligono iscritto.*

La seconda è, che *la stessa area variabile del poligono iscritto al circolo, ha parimente per limite l' area del triangolo; di cui la base e l' altezza si suppongono rispettivamente uguali alla circonferenza ed al raggio.*

L' ultima infine, che, in generale *due quantità determinate A, B, limiti entrambe d' una stessa variabile x, sono necessariamente uguali tra loro.*

Per poco che si rifletta al terzo dei teoremi quì espressi, sarà agevole convincersi che non è se non un caso particolare di quello con cui termina la Nota II. al Capo precedente. Gli altri due può il Lettore o raccoglierli per se dalle proprietà del circolo esposte più sopra, o vederli dimostrati nelle Opere d' ARCHIMEDE e di molti altri Scrittori più moderni di cose Geometriche.

CAPO VII.

Proprietà particolari del triangolo rettangolo: usi di queste proprietà: metodo per trovare il rapporto prossimo della circonferenza del circolo al raggio.

163. TEOREMA I. *In ogni triangolo rettangolo* BAC (Fig. 110), *il quadrato* BCEG *costruito sopra l' ipotenusa* BC, *è uguale alla somma dei*

quadrati ABIH, ACKL, *costruiti sopra i lati* AB, AC: *ovvero in altri termini* $(BC)^2=(AB)^2+(AC)^2$.

Dall'angolo retto *A* abbassate sopra l'ipotenusa *BC* la perpendicolare *AD*, che prolungherete finchè incontri *GE* in *F*: dal medesimo angolo *A*, e dall'angolo *C*, guidate le rette *AG*, *CI*. I due triangoli *ABG*, *IBC* sono perfettamente uguali (51); perciocchè $AB=IB$, $BG=BC$, e l'angolo $ABG=$ all'angolo *IBC*, poichè ciascuno di questi angoli è composto d'un angolo retto e dell'angolo *ABC*. Ora (141) il triangolo *ABG* è la metà del rettangolo *DBGF*, che ha la medesima base *BG*, e la medesima sua altezza *BD*: ed il triangolo *IBC* è la metà del quadrato *ABIH* che ha la medesima base *IB*, e la medesima sua altezza *AB*. Dunque essendo eguali le metà, sono uguali anche i tutti, cioè a dire, il rettangolo *DBGF* è uguale al quadrato *ABIH*. Si dimostrerà similmente che il rettangolo *DCEF* è uguale al quadrato *ACKL*. Onde ne segue che il quadrato *BCEG* è uguale alla somma dei quadrati *ABIH*, *ACKL*.

164. COROLLARIO I. Poichè si ha $(BC)^2=(AB)^2+(AC)^2$, si vede che conoscendo due dei tre lati d'un triangolo rettangolo, si conoscerà altresì il terzo.

165. COROLLARIO II. Il quadrato *BCEG*, ed i due rettangoli *BDFG*, *DCEF*, avendo la medesima altezza *BG*, stanno tra loro (146) come le basi *BC*, *BD*, *DC*; cioè a dire, si ha $BCEG : BDFG : DCEF :: BC : BD : DC$. Dunque (a motivo di $BDFG=ABIH$, e di $DCEF=ACKL$), si avrà $BCEG : ABIH : ACKL :: BC : BD : DC$. Quindi *il quadrato costruito sopra l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo ed i quadrati costruiti sopra gli altri due lati, stanno fra loro come l'ipotenusa ed i suoi segmenti determinati dalla perpendicolare abbassata dall'angolo retto sopra l'ipotenusa.*

166. COROLLARIO III. Se da un punto qualunque A (Fig. 111) d'una semicirconferenza, si conducano alle estremità del diametro BC, le corde AB, AC, l'angolo A sarà retto (86). Dunque, se si costruiscano, come sopra, i quadrati $BCEG$, $ABIH$, $ACKL$, e si abbassi la perpendicolare ADF, si avrà, 1.° $ABIH=BDFG$, ossia $(AB)^2=BG\times BD$; ed $ACKL=DCEF$, ossia $(AC)^2=CE\times CD=BC\times CD$. Quindi *il quadrato d'una corda è uguale al prodotto del diametro per la parte di questo diametro compresa fra una delle estremità della corda, e la perpendicolare abbassata dall'altra estremità sul diametro*.

2.° Si vede che *il quadrato del diametro* BC *ed i quadrati delle corde* AB, AC *stanno fra loro come il diametro e le ascisse* BD, DC, *corrispondenti alle corde*.

167. COROLLARIO IV. Di quì si ricava ancora una maniera di trovare una media proporzionale fra due linee date BC, KH (Fig. 112). Sopra la maggiore BC di queste due linee, come diametro, descrivete il semicircolo BAC: portate la seconda linea KH da B in D: dal punto D alzate al diametro BC la perpendicolare DA, e tirate la corda AB: questa corda è la media proporzionale ricercata: poichè si ha $(AB)^2=BC\times BD$; e per conseguenza $BC : AB :: AB : BD$ o KH.

168. COROLLARIO V. Se in un quadrato $MNPQ$ (Fig. 113.) si conduca la diagonale MP, essa dividerà questo quadrato in due triangoli rettangoli isosceli MNP, MQP, perfettamente uguali, e si avrà $(MP)^2=(MN)^2+(NP)^2=2(MN)^2$. Dunque $MP=MN\times\sqrt{2}$; il che dà $MP : MN :: \sqrt{2} : 1$. Quindi *la diagonale del quadrato sta al lato nel rapporto di* $\sqrt{2}$ *ad* 1; rapporto che è *incommensurabile*, perchè non si può assegnare alcun numero razionale che esprima esattamente la radice quadrata di 2.

169. TEOREMA II. *Se dall' angolo* A *d' un triangolo* ABC (Fig. 114 e 115) *si abbassi una perpendicolare* AO, *che cada sopra il lato opposto prolungato* (Fig. 114), *o sopra questo stesso lato* (Fig. 115) *si avrà* $(AB)^2=(AC)^2+(BC)^2\pm 2\,BC\times CO$. (Il segno $+$ è per la figura 114, ed il segno $-$ per la figura 115).

Il triangolo rettangolo *AOB* dà $[AB]^2=[AO]^2+[OB]^2$; ed il triangolo rettangolo *AOC* dà $[AO]^2=[AC]^2-[CO]^2$. Dunque $[AB]^2=[AC]^2+[OB]^2-[CO]^2$. Ma da un altro canto, $[OB]^2$, ossia il quadrato del binomio $BC\pm CO$, è [Alg. 79. ed 80] $[BC]^2+[CO]^2\pm 2BC\times CO$. Dunque $[AB]^2=(AC)^2+[BC]^2\pm 2BC\times CO$.

170. COROLLARIO. Di quì ne segue che il segmento $CO=\dfrac{\pm(AB)^2\mp(AC)^2\mp(BC)^2}{2BC}$.

171. PROBLEMA I. *Conoscendo il raggio CA d' un cerchio* (Fig. 116), *ed il lato AB d' un poligono regolare che gli è iscritto, trovare l' espressione dell' apotema CM di questo poligono.*

La perpendicolare *CM* divide il lato *AB* in due parti eguali (73). Quindi si ha $AM=\dfrac{AB}{2}$, ed $(AM)^2=\dfrac{(AB)^2}{4}$. Il triangolo rettangolo *AMC* dà $CM=\sqrt{((AC)^2-(AM)^2)}=\sqrt{\left((AC)^2-\dfrac{(AB)^2}{4}\right)}$: espressione, nella quale tutto è noto.

127. PROBLEMA II. *Conoscendo il raggio del circolo, ed il lato AB d' un poligono regolare iscritto: trovare il lato OA o OB del poligono regolare che ha due volte più lati.*

Avendo determinato CM, pel problema precedente, sottraggo questa linea dal raggio CO, e con ciò conosco OM. Il triangolo rettangolo AMO dà $AO = \sqrt{(AM)^2 + (MO)^2}$: espressione nella quale tutto è noto; poichè AM è la metà di AB che è cognito.

173. COROLLARIO. Il lato OA essendo determinato, si moltiplicherà lo stesso pel numero dei lati del poligono al quale deve appartenere, il che darà il contorno di questo poligono; si cercherà [171] il suo apotema, che si moltiplicherà per la metà del contorno; il che darà la superficie del poligono.

174. PROBLEMA III. *Conoscendo il lato AB d'un poligono regolare iscritto in un circolo; trovare il lato del poligono regolare circoscritto.*

Egli è chiaro che essendo AB il lato del poligono iscritto, quello del poligono circoscritto è la retta ab che tocca l'arco AOB nel suo mezzo O, ed è terminata dai raggi CA, CB, prolungati. I triangoli simili CMA, COa, danno $CM : CO ::$ $AM : aO :: \frac{AB}{2} : \frac{ab}{2} :: AB : ab$; dunque ab $= \frac{AB \times CO}{CM}$: espressione nella quale tutto è noto (171).

175. PROBLEMA IV. *Trovare il rapporto, almeno prossimo, della circonferenza del circolo al suo raggio o al suo diametro.*

1.° Osservo che, se s'iscrivono o circoscrivono al circolo due poligoni regolari d'un medesimo numero di lati, ciascun arco di circolo è maggiore del lato del poligono iscritto, e minore del lato del poligono circoscritto. Difatti, siano AB, ab due lati corrispondenti del poligono iscritto e del poligono circoscritto: primieramente (5) l'ar-

co AOB è maggiore della sua corda AB; da un altro canto, egli è evidente che il settore *CAOB* è minore del triangolo rettilineo *Cab*, cioè a dire, che si ha (153 e 145), $\frac{AOB \times CO}{2} < \frac{ab \times CO}{2}$;

dunque, a motivo del fattore comune $\frac{CO}{2}$, si ha $AOB < ab$.

2.° Supponendo che la corda AB sia eguale al raggio *CA*, l'angolo *C* del triangolo equilatero CAB, avrà per misura la sesta parte della circonferenza, poichè la somma dei tre angoli ha per misura la semicirconferenza; onde ne segue che si esaurisce appunto l' intera circonferenza coll' iscriversi di mano in mano sei volte il raggio. Il poligono risultante è dunque un esagono regolare: perciocchè tutti i suoi lati sono eguali, e tutti i suoi angoli sono composti d'angoli eguali. Per mezzo del lato AB di questo poligono, noi calcoleremo (172), in parti del raggio, il lato del poligono regolare di 12 lati; con questo, il lato del poligono regolare di 24 lati; con questo, il lato del poligono regolare di 48 lati; con questo, il lato del poligono regolare di 96 lati; e così di seguito. Potremo dunque accostarci continuamente, in meno, alla circonferenza del circolo. Conoscendo il lato dell' ultimo poligono iscritto, cioè a dire, del poligono al quale ci fermiamo, si determinerà (174) il contorno dell' ultimo poligono regolare circoscritto che gli corrisponde. Tutte queste operazioni daranno i contorni di due poligoni, l' uno minore, l' altro maggiore della circonferenza. Se il numero de' loro lati è un poco considerabile, questi due contorni non differiranno molto l' uno dall' altro; e per conseguenza prendendo la metà della loro som-

ma, si avrà un numero che esprimerà ad un di presso la circonferenza in parti del raggio.

ARCHIMEDE ha trovato, coll' iscrivere, e circoscrivere al circolo due poligoni regolari, ciascuno di 96 lati, che il diametro essendo espresso da 7, la circonferenza è espressa da un numero un poco minore di 22. ADRIANO MEZIO, Matematico Olandese, spingendo l'approssimazione più oltre, ha trovato che il diametro essendo espresso da 113, la circonferenza è espressa da un numero che è pochissimo minore di 355. Altri Matematici hanno date altre determinazioni più o meno prossime; ma niuno ha potuto ancora trovare il rapporto esatto e rigoroso della circonferenza al diametro o al raggio.

179. COROLLARIO I. Le circonferenze dei circoli essendo tra loro (126) come i raggi o i diametri, se dicasi 1 il diametro d' un circolo dato, π la sua circonferenza, R il raggio d' un altro circolo, C la sua circonferenza: si avrà

$$C = 2R \times \frac{\pi}{1}$$

Secondo il rapporto trovato da Archimede, si ha $7 : 22 :: 1 : \pi$, dunque $\pi = \frac{22}{7}$: e $C = 2R \times \frac{22}{7}$. Secondo il rapporto trovato da Mezio, si avrebbe $\pi = \frac{355}{113}$; così degli altri rapporti.

177. COROLLARIO II. La superficie del circolo che ha per raggio R, e per circonferenza C; essendo $\frac{C \times R}{2}$ [155], avrà per valore πR^2. Laonde si vede che, *per avere la superficie d' un circolo*,

Bisogna moltiplicare il quadrato del raggio pel rapporto della circonferenza al diametro.

178. COROLLARIO III. Se fosse nota la superficie d'un circolo, e si dovesse trovare il suo raggio, si avrebbe [chiamando S la superficie data] $S=\pi R^2$; dunque $R^2=\frac{S}{\pi}$, ed $R=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

CAPO VIII.

Di alcune proprietà generali dei Piani.

179. Le proprietà dei Piani, che prendiamo a dimostrare, ci saranno utili nel seguito.

Bisogna qui ricordarsi della definizione che abbiamo data [6] del piano o della superficie piana. Egli è evidente che si può considerare un piano, come generato dal moto d'una linea retta che si muove nello spazio, sempre parallelemente a se stessa, o dal moto d'una linea retta che si rivolge intorno ad un punto, senza abbassarsi nè alzarsi in alcun luogo per rapporto agli oggetti immobili dello spazio. In generale, ogni mezzo di formare una superficie sopra la quale si possono tirare delle linee rette per ogni verso, può essere proposto come il principio generatore del piano.

180. Una linea è perpendicolare ad un piano, quando cade sopra questo piano, senza inclinare da alcuna parte. Si dice indifferentemente che una linea è perpendicolare ad un piano, o che un piano è perpendicolare ad una linea, per esprimere che la linea non pende da alcuna parte per rapporto al piano.

Medesimamente allorchè un piano cade sopra un altro, senza pendere da alcuna parte, questi due piani sono perpendicolari fra loro. Egli è chiaro

che questa condizione è adempiuta, quando uno dei piani passa per una linea perpendicolare all' altro; poichè allora il primo piano non può pendere da alcuna parte per rapporto al secondo, nè reciprocamente questo da alcuna parte per rapporto all' altro.

181. TEOREMA I. *Due linee rette* AB, CD [Fig. 117.] *che si tagliano, sono in un medesimo piano.*

Immaginiamoci che la retta CD si muova parallelemente a se stessa, lungo AB; essa genererà un piano che conterrà queste due linee.

Se le due linee fossero parallele, potrebbero essere riputate incontrarsi ad una distanza infinita; e la proposizione avrebbe egualmente luogo.

182. COROLLARIO I. La posizione di due linee rette che si tagliano, o che sono parallele, basta per determinare quella d' un piano: voglio dire, che per queste due linee non si può far passare che un solo e medesimo piano, nella stessa maniera che da un punto ad un altro non si può condurre che una sola linea retta.

183. COROLLARIO II. Tre linee rette che s' incontrano l' una coll' altra, sono in un medesimo piano. Imperciocchè, per esempio, la retta *AD* può essere riguardata come condotta sopra il piano che descrive *CD*, nel muoversi parallelemente a se stessa lungo la *AB*. [*].

(*) Si sentirà forse meglio la verità di questa proposizione, se si osservi.

1.° Che una linea retta dee giacere necessariamente tutta intera nel piano medesimo in cui trovansi collocati due punti di essa, quali che siano.

2.° Che, qualora una linea AD ne incontri in A e in D due altre CD, BA, le quali si tagliano tra loro, i due punti A e D della prima cadono per necessità nel piano comune a quest' ultime.

184. TEOREMA II. *Per una stessa retta AB* [Fig. 118] *si può far passare una infinità di piani.*

Guidate pel punto A, e secondo ogni sorta di direzione nello spazio, le rette CAG, DAE, FAH, e concepite che ciascuna di queste linee si muova parallelemente a se stessa lungo la AB: egli è chiaro che esse genereranno i piani CK, DI, FL, i quali tutti passano per AB.

185. COROLLARIO. Si scorge nel tempo stesso che la sezione comune dei due piani è una linea retta. Difatti, si può considerare la retta *AB*, come la sezione comune dei due piani *CK*, *DI*, o dei due piani *CK*, *FL*, o dei due piani *DI*, *FL*.

186. TEOREMA III. *Se una retta* AB [Fig. 119.] *è perpendicolare a due rette* CF, DE *che s' incrocicchiano al suo piede* B, *nel piano* IK, *essa sarà perpendicolare a questo piano.*

La questione riducesi a dimostrare che, essendosi la retta AB supposta perpendicolare alle due rette *CF*, *DE*, sarà altresì perpendicolare ad ogni altra retta *GH*, guidata pel suo piede *B* nel piano *IK*; perciocchè allora non inclinerà da alcuna parte per rapporto a questo piano. Ora, per giugnervi, fo le quattro linee *BC*, *BD*, *BE*, *BF* eguali fra loro, e guido le rette *CD*, EF, AC, AD, AE, AF, AG, AH. La retta AB essendo perpendicolare sopra il mezzo delle linee CF, DE, che sono eguali, si avrà (39) AC=AF=AD=AE. Inoltre, a motivo dei triangoli CDB, FBE, che hanno gli angoli CBD, FBE, eguali, compresi tra lati eguali, e che sono per conseguenza perfettamente eguali (51), si avrà CD=EF. Dunque i due triangoli CAD, FAE, che hanno i tre lati eguali ciascuno a ciascuno, sono perfettamente eguali [54]. Quindi l' angolo ACD=all' angolo AFE. E siccome i due triangoli CBG, FBH, che hanno tutti gli angoli eguali, ed i lati BC, BF eguali, sono perfetta-

mente eguali (53); ne segue che CG=FH. Dunque i due triangoli ACG, AFH, che hanno un angolo eguale compreso fra lati eguali ciascuno a ciascuno sono perfettamente uguali. Quindi AG=AH. Dunque, poichè si ha BG=BH, la retta AB ha due punti A e B egualmente distanti dalle estremità della retta GH; essa è dunque perpendicolare a GH [42].

187. COROLLARIO. Poichè un piano è perpendicolare ad un altro (180), quando passa per una linea retta perpendicolare a questo: e che per conseguenza due piani che si tagliano, sono ciascuno in particolare perpendicolare ad un terzo piano, quando la loro sezione comune è perpendicolare a questo piano; ne segue che due piani che si tagliano, sono perpendicolari ad un terzo piano, quando la loro sezione comune è perpendicolare a due rette che s' incrocicchiano al suo piede in questo terzo piano.

188. TEOREMA IV. *Se due piani che si tagliano, sono perpendicolari ad un altro, la loro sezione comune sarà perpendicolare a questo terzo piano.*

Imperciocchè ciascuno dei due primi passa per una linea perpendicolare al terzo; dunque questa linea, che è nel medesimo tempo nei due piani, è la loro sezione comune.

189. TEOREMA V. *Allorchè due rette* AB, CD (Fig. 120) *sono perpendicolari ad un medesimo piano* IK, *esse sono parallele fra loro.*

Congiungete i piedi B e D delle due perpendicolari AB, CD, colla retta BD. Ciascuna delle linee AB, CD essendo perpendicolare al piano IK; sarà perpendicolare a BD [180]. Immaginiamoci che la retta AB si muova parallelemente a se stessa lungo la BD; egli è chiaro che alla fine essa verrà a confondersi con CD. Dunque le tre linee AB, CD,

BD, sono in un medesimo piano; dunque, poichè le due prime sono perpendicolari a BD, esse sono parallele fra loro [68. n.° 1].

190. COROLLARIO. Dunque se due rette AB, CD [Fig. 121] sono parallele ad una terza linea EF, saranno parallele fra loro. Imperciocchè immaginiamoci un piano IK perpendicolare alla retta EF. Le rette AB, EF essendo parallele, se nei punti B ed F ove incontrano il piano IK, noi tiriamo la retta BF, e concepiamo che la retta AB si muova parallelemente a se stessa lungo la BF, essa verrà finalmente a confondersi con EF. Dunque, in tutte le sue posizioni, la retta AB è perpendicolare al piano IK. Per la stessa ragione, la retta CD è perpendicolare al piano IK. Quindi le rette AB, CD sono l' una e l'altra perpendicolari al piano IK, e sono per conseguenza parallele.

191. TEOREMA VI. *Allorchè due piani si tagliano, formano, da ciascuna parte della sezione, degli angoli (che si chiamano angoli piani), ciascuno de' quali ha la stessa misura dell' angolo rettilineo formato da due perpendicolari condotte in questi piani ad un medesimo punto della loro sezione comune.*

Siano [Fig. 122.] i due piani AB, CK, che si tagliano in ED: dico che, per esempio, l' angolo formato dai due piani CE, EB, ha la stessa misura dell' angolo rettilineo IFG, formato dalle due rette IF, GF, condotte nei piani CE, EB, perpendicolarmente al medesimo punto F della loro sezione comune ED. Imperciocchè immaginiamoci che nel primo istante il piano CE fosse sovrapposto al piano EB: che le rette IF, GF, supposte eguali, non formassero allora che una sola e medesima linea: e che in seguito il piano EB rimanendo immobile, si sia fatto girare il piano CE sopra FD, come sopra una cerniera, per for-

mare l' angolo piano CDB. Egli è chiaro che durante questo moto, la retta IF è sempre rimasta perpendicolare ad ED, e che il punto ha descritto un arco di cerchio che esprime la quantità di cui il piano CE si è allontanato dalla sua posizione iniziale, per formare l' angolo piano CDB, e che è per conseguenza la misura di quest' angolo. Ora questo stesso arco è la misura dell' angolo rettilineo IFG. Dunque l' angolo piano CDB ha la stessa misura dell' angolo rettilineo formato da due perpendicolari, condotte nei due piani, ad un medesimo punto della loro sezione comune.

Dei piani paralleli.

192. Se s' immagina che sopra tutti i punti di un piano s' innalzino delle perpendicolari eguali, ed in seguito si faccia passare per le loro estremità una superficie; questa superficie sarà detta *parallela* al piano proposto.

193. COROLLARIO. Di qui si vede 1.° che la superficie in questione è un piano; poichè essa non può in alcun modo alzarsi nè abbassarsi per rapporto al piano proposto, e che per conseguenza vi si possono tirare delle linee rette per ogni verso.

2.° Se per una qualunque delle perpendicolari eguali si fa passare un piano che abbia d' altronde qualsivoglia direzione, questo piano taglierà il piano inferiore ed il piano superiore secondo due linee rette che saranno parallele; perciocchè ciascuna delle perpendicolari eguali alzate sopra la linea inferiore è altresì perpendicolare alla linea superiore (60). Onde ne risulta che tutte le perpendicolari eguali alzate sopra il piano inferiore, sono egualmente perpendicolari al piano superiore; dunque questi due piani sono da per tutto egualmente distanti l' uno dall' altro; e possono essere detti reciprocamente paralleli l' uno all' altro.

194. TEOREMA VII. *Se due piani paralleli sono incontrati da un terzo piano che loro sia perpendicolare o obbliquo; le sezioni di questo piano, con ciascuno degli altri due, saranno parallele.*

Imperciocchè, se le linee di cui trattasi, non fossero parallele, ed andassero per conseguenza ad incontrarsi, i due piani che si sono supposti paralleli, andrebbero altresì ad incontrarsi, e non sarebbero da per tutto egualmente lontani l'uno dall' altro; il che implica contraddizione colla loro natura.

195. TEOREMA VIII. *Se due piani paralleli GH, IK* (Fig. 123) *sono incontrati in AC e BD, AE e BF, da due piani ABCD, ABFE, che si tagliano secondo AB: i due angoli CAE, DBF, formati sopra i due piani paralleli, saranno eguali.*

Fate AC=BD, AE=BF, e tirate le rette CE, DF, CD, EF. Le rette AC, BD essendo parallele (194) ed inoltre eguali, il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo, e si ha AB=CD. Parimente, il quadrilatero ABFE è un parallelogrammo, a si ha AB=EF. Dunque le due rette CD, EF sono eguali e parallele; e per conseguenza CE=DF. Quindi i due triangoli CAE, DBF hanno i tre lati eguali ciascuno a ciascuno, e sono per conseguenza perfettamente eguali (54). Dunque i due angoli omologhi CAE, DBF sono eguali.

CAPO IX.

Misura della superficie e della solidità del Prisma.

196. Il *prisma* (Fig. 124.) è un solido terminato da due poligoni ABCDE, FGHIK, paralleli e perfettamente uguali e da altrettante facce parallelogramme FABG, GBCH, ec. quanti sono i lati in uno di questi poligoni.

Egli è evidente che si può riguardare il prisma come generato dal moto del poligono ABCDE che s' innalzasse parallelemente a se stesso lungo AF, uno degli spigoli di questo solido. Allora questo spigolo si chiama la *direttrice* del prisma.

197. I due poligoni ABCDE, FGHIK, chiamansi le *basi opposte* del prisma; ed una perpendicolare FO, tirata da un punto F d' una di queste basi sopra l' altra, dicesi *altezza* del prisma.

Quando si dice semplicemente la base d' un prisma, s' intende la sua base inferiore ABCDE.

L' aggregato delle facce laterali FABG, GBCH, ec. chiamasi la *superficie convessa* del prisma.

198. Il prisma è *retto*, quando gli spigoli FA, GB, HC, ec. sono perpendicolari alle basi opposte. Allora ciascuno di questi spigoli può essere riguardato come l' altezza del prisma. Se gli spigoli sono inclinati per rapporto alle basi, il prisma è *obbliquo*; ed allora i suoi spigoli sono maggiori della sua altezza.

199. Il prisma, sia retto sia obbliquo prende la sua denominazione dal numero de' lati del poligono che n' è la base. Se questa base è un triangolo, il prisma è *triangolare* (Fig. 125).

Se la base è un parallelogrammo, il prisma chiamasi *parallelepipedo* (Fig. 126). E se di più la base è un rettangolo, ed il prisma sia retto, dicesi *parallelepipedo rettangolo*. Tra i parallelipipedi rettangoli, il più semplice di tutti è il *cubo* (Fig. 127), che è terminato da sei quadrati eguali e perpendicolari tra loro. Questo solido che nella immaginazione si rappresenta molto facilmente, perchè tutte le sue facce sono simmetriche, e non contengono che angoli retti, serve di unità nella misura dei solidi, come il quadrato serve di unità nella misura delle superficie. Si chiama conseguentemente *cubatura d' un solido*, la valutazione

di questo solido in cubi o parti di cubi, ciascuno de' quali è preso per unità.

Se la base d'un prisma è un pentagono (Fig. 124), il prisma è *pentagonale*. Ed in generale si usa l'espressione *prisma poligonale*, per denotare un prisma che ha per base un poligono qualunque.

200. Allorchè le basi opposte d'un prisma sono dei cerchi (Fig. 128 e 129) che si possono sempre riguardare come poligoni d'un' infinità di lati, il prisma prende il nome di *cilindro*.

La retta NM, condotta dal centro della base superiore a quello della base inferiore, chiamasi *asse* del cilindro.

Allorchè l'asse NM è perpendicolare alle basi opposte del cilindro, questo cilindro dicesi *retto* (Fig. 128); ed allora l'asse può esprimere l'altezza del cilindro. Se l'asse è obbliquo per rapporto alle basi, il cilindro è detto *obbliquo* (Fig. 129); ed allora l'asse è maggiore dell'altezza FO del cilindro.

201. PROBLEMA I. *Determinare la superficie d'un prisma.*

1.° Le basi opposte d'un prisma essendo supposte dei poligoni rettilinei qualunque, le loro superficie si trovano per mezzo dell'articolo 151, ed allorchè queste basi sono dei cerchi, le loro supercie si trovano per mezzo dell'articolo 155.

2.° Le facce laterali del prisma essendo dei parallelogrammi, si potrebbero determinare (144) separatamente le loro superficie, e poi aggiungerle insieme. Ma l'operazione può essere semplificata, considerando che, se si tagli il prisma (Fig. 124), con un piano *abcde* perpendicolare alla direttrice AF, questo piano sarà eziandio perpendicolare a tutti gli altri spigoli GB, HC, ec. che sono paralleli ad AF. Quindi prendendo le rette uguali AF, BG, CH, ec. per le basi dei parallelogrammi FB,

GC, HD, ec., le rette ab, bc, cd, ec. ne saranno le altezze; e per conseguenza *l' intera superficie convessa del prisma avrà per espressione*, $AF \times ab + BG \times bc + CH \times cd +$ *ec.*, *ossia* $AF \times (ab + bc + cd + ec.)$: *cioè a dire*, *il prodotto della direttrice nel contorno d' una sezione fatta perpendicolarmente a questa direttrice.*

202. COROLLARIO I. Quando il prisma è retto, la sezione *abcde* è uguale a ciascuna delle sue basi opposte, e la direttrice diventa l' altezza del prisma. Quindi si può dire che la superficie convessa d' un prisma retto è uguale al prodotto della sua altezza, nel contorno del poligono che ne è la base inferiore o superiore.

203. COROLLARIO II. Di quì si vede che la superficie convessa d' un cilindro retto (Fig. 128), è uguale al prodotto della sua altezza NM, per la circonferenza della sua base inferiore o superiore.

Nel cilindro obbliquo (Fig. 129), la sezione *abcd*, fatta perpendicolarmente alla direttrice AF, è una curva che si chiama *elisse*. Si avrebbe bisogno di saper determinare il contorno di questa curva per poter misurare la superficie convessa del cilindro. Ma siffatta determinazione non appartiene alla Geometrica elementare.

204. TEOREMA. *Due prismi ABCDEF, ABC GIIK* (Fig. 130), *che hanno la stessa base, o delle basi eguali, e che sono compresi fra gli stessi piani paralleli, sono eguali in solidità.*

Immaginiamoci che questi due prismi siano composti ciascuno d' una infinità di lamine parallele alle loro basi, e poste le une sopra le altre: egli è chiaro che vi saranno in ciascuno di essi altrettante lamine, quanti sono i punti nella sua altezza. Ora le altezze dei due prismi sono eguali, poichè sono compresi fra gli stessi piani paralleli, ed in ciascun prisma ogni sezione parallela alle basi op-

poste è uguale ad una di queste basi. Dunque i due prismi contengono un medesimo numero di lamine elementari eguali, e sono per conseguenza eguali in solidità.

205. PROBLEMA II. *Determinare la solidità d' un prisma.*

Considerando il prisma come composto d' un' infinità di lamine eguali e parallele alla sua base generatrice, si vedrà che per avere la somma di tutte queste lamine, ossia la solidità del prisma, basterà di moltiplicare una di esse, per esempio, la base stessa, pel loro numero, cioè a dire, pel numero de' punti dell' altezza. Quindi *il solido d' un prisma è uguale al prodotto della sua base nella sua altezza.*

Ciò si applica egualmente al cilindro retto ed al cilindro obbliquo.

Sopponiamo, per esempio, che la base ACBDE (Fig. 124) contenga 100 piedi quadrati, e che l' altezza FO sia di 10 piedi: la solidità del prisma sarà di 1000 piedi cubici, prodotto di 100 piedi quadrati per 10 piedi lineari.

206. COROLLARIO. Due prismi o due cilindri che hanno basi eguali, stanno fra loro come le altezze; e due prismi o due cilindri che hanno altezze uguali, stanno fra loro come le basi. Imperciocchè essendo eguali, in generale, ai prodotti delle loro basi per le loro altezze; se questi prodotti hanno un medesimo fattore, e si dividono per questo fattore, essi saranno fra loro come l' altro fattore (Alg. 130).

CAPO X.

Misura della superficie e della solidità della Piramide.

207. La *piramide* (Fig. 131) è un solido terminato da un poligono qualunque ABCDE che le serve di base, e da' piani triangolari ASB, BSC, CSD, ec., che s' innalzano sopra i lati di questo poligono, e vanno tutti a riunirsi in un medesimo punto S, che chiamasi *vertice* della piramide.

Possiamo ancora riguardare la piramide come un solido compreso fra il poligono della sua base, e la superficie che sarebbe generata dal moto d' una linea retta che, rivolgendosi intorno al vertice S, scorresse lungo tutti i lati del poligono.

La perpendicolare SO, abbassata dal vertice della piramide sopra la sua base, ne è l' altezza.

208. Si dice che una piramide è *triangolare, quadrangolare, pentagonale*, ec., secondo che il poligono che le serve di base, è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, ec. In generale, si adopra l' espressione di *piramide poligonale*, per denotare una piramide che ha per base un poligono qualunque.

209. Allorchè il poligono della base è regolare (Fig. 132), e che inoltre la perpendicolare SO, abbassata dal vertice della piramide, passa pel centro di questo poligono, la *piramide è regolare*.

Egli è chiaro che in queste sorti di piramidi, tutti i triangoli laterali ASB, BSC, CSD, ec. sono isosceli e perfettamente uguali. Dunque se dal vertice S si tiri la retta SK, perpendicolare sopra uno AB dei lati della base; questa linea che cade sopra il mezzo di AB, potrà esprimere l' altezza di tutti i triangoli di cui si tratta. Essa chiamasi l' *apotema* della piramide regolare.

210. Una piramide che ha per base un circolo (Fig. 133 e 134), che si può riguardare come un poligono d'una infinità di lati, appellasi *cono*.

Le rette SA, SC, ec., condotte dal vertice del cono alla circonferenza della sua base, si chiamano i *lati* del cono e la retta SM, condotta dal vertice al centro della base, appellasi l'*asse*.

211. Vi sono due sorti di coni, il cono *retto*, ed il cono *obbliquo* o *scaleno*.

Nel cono retto (Fig. 133), l'asse SM è perpendicolare alla base, e per conseguenza esprime nel medesimo tempo l'altezza del cono. Si vede che questo solido può essere riguardato come prodotto dalla rivoluzione del triangolo rettangolo SMA intorno all'asse SM.

Nel cono obbliquo (Fig. 134), l'asse SM non è perpendicolare alla base, ed è maggiore dell'altezza SO del cono. Questo cono non è un solido di rivoluzione, cioè a dire, non può essere riguardato come prodotto dalla rivoluzione d'una medesima figura intorno ad una stessa linea. Esso è soltanto nel caso d'ogni piramide; e può essere considerato come lo spazio compreso fra il circolo della sua base, e la superficie generata dal moto d'una linea SZ, che passasse incessantemente nel punto S, e toccasse nel rivolgersi tutti i punti della circonferenza ABCD.

Tagliando un cono obbliquo con piani che passino tutti pel suo asse, si formeranno dei triangoli che avranno altezze disuguali, ma basi eguali, essendo queste basi i diametri del circolo che serve di base al cono. Il minore tra essi, in superficie, è quello ASC che divide il cono in due parti eguali e simili (si chiama d'ordinario *triangolo per l'asse*); ed il maggiore è quello che è perpendicolare al triangolo ASC.

212. PROBLEMA I. *Trovare la superficie d'una piramide.*

La superficie d'una piramide si determina, cercando coi metodi del Capo VI. la superficie del poligono che le serve di base, e le superficie dei suoi triangoli laterali; poi aggiungendo insieme tutte queste parti.

213. COROLLARIO I. Allorchè la piramide è regolare (Fig. 132) l'area del poligono regolare ABCDE è uguale alla metà del prodotto del suo contorno nel suo apotema OK (153); e la somma di tutti i triangoli laterali che sono allora tutti isosceli e perfettamente uguali, è uguale alla metà del prodotto del contorno ABCDE per l'apotema SK della piramide.

Tutto ciò si applica al cono retto che è una piramide regolare d'un'infinità di lati.

Si vede adunque che *la superficie convessa d'un cono retto è uguale alla metà del prodotto della circonferenza della sua base, nel lato del cono.*

Quanto alla superficie convessa del cono obbliquo, essa non può essere determinata coi soli principj della Geometria elementare.

214. COROLLARIO II. La superficie del poligono regolare ABCDE che serve di base ad una piramide regolare, sta alla superficie convessa di questa piramide, come l'apotema OK del poligono della base, sta all'apotema SK della piramide: perciocchè le espressioni di queste due superficie hanno per fattore comune la metà del contorno del poligono ABCDE, e per secondo fattore, OK, SK; ora non si cambia punto il rapporto di due grandezze, col dividerle per una medesima grandezza; dunque ec.

Medesimamente, *nel cono retto, la superficie della base sta alla superficie convessa del cono,*

come il raggio della base al lato del cono.

215. TEOREMA I. *Se si taglia una piramide qualunque SABCDE (Fig. 131) con un piano* abcde *parallelo alla sua base ABCDE, i due poligoni* abcde, *ABCDE saranno simili.*

Imperciocchè 1.° le rette *ab* ed AB, *bc* e BC, ec., sezioni dei piani SAB, SBC, ec. coi piani paralleli *abcde*, ABCDE, essendo parallele ciascuna a ciascuna (195), gli angoli *abc* ed ABC, *bcd* e BCD, ec. sono eguali ciascuno a ciascuno; dunque i due poligoni *abcde*, ABCDE sono equiangoli.

2.° I triangoli *aSb* ed ASB, *bSc* e BSC, ec. essendo simili ciascuno a ciascuno, si ha questa serie di rapporti eguali *ab* : AB :: S*b* : SB :: *bc* : BC :: S*c* : SC :: *cd* : CD, ec.; ovvero (non prendendo che i rapporti di cui si ha bisogno) *ab* : AB :: *bc* : BC :: *cd* : CD :: ec.; dunque i due poligoni equiangoli *abcde*, ABCDE hanno i lati proporzionali intorno agli angoli eguali. Dunque per fine questi due poligoni sono simili (110).

216. COROLLARIO I. Dunque, se la piramide SABCDE (Fig. 132) è regolare, lo sarà eziandio la piramide S*abcde*; poichè queste due piramidi si rassomigliano in tutto; cioè a dire, esse hanno per basi dei poligoni regolari simili, e per facce laterali dei triangoli isosceli simili e perfettamente eguali fra loro in ciascuna piramide. Quindi, essendo SK l' apotema della prima, sarà S*k* l' apotema della seconda, e la superficie convessa della prima avendo per espressione $\frac{(AB+BC+CD+ec.)\times SK}{2}$, la superficie convessa della seconda avrà per espressione:

$$\frac{(ab+bc+cd+ec.)\times Sk}{2}.$$

217. COROLLARIO II. Se si taglia un tronco di piramide regolare, a basi parallele *abcde*, ABCDE,

con un piano *mnpqr*, che loro sia parallelo, e che ne sia egualmente distante: la superficie convessa di questo tronco avrà per valore $(mn+np+pq+\text{ec.})\times hK$, cioè a dire, il prodotto del contorno della sezione media per l' altezza d' uno dei trapezj laterali. Perciocchè tutti i trapezj laterali sono perfettamente uguali, e ciascuno di essi (149) ha per valore il prodotto della sua altezza, per una linea retta parallela alle sue basi opposte, ed egualmente distante da queste basi.

Medesimamente, la superficie convessa d' un tronco di cono retto, a basi opposte parallele, è uguale al prodotto della parte del lato del cono, compresa fra le circonferenze delle basi opposte, per la circonferenza del circolo descritto parallelamente alle basi; e ad uguali distanze da queste basi.

218. TEOREMA II. *I solidi di due piramidi* SABCDE, NMPQ (Fig. 131 e 133), *che hanno altezze eguali* SO, NR, *e le basi qualunque, stanno fra loro come queste basi.*

Avendo preso sulle altezze uguali SO, NR, delle parti uguali qualunque *So*, *Nr*; conduco pei punti *o* ed *r* i piani *abcde*, *mnpq*, paralleli alle basi delle due piramidi. Conduco di più, secondo le altezze SO, NR e gli spigoli SA, NM, i due piani SOA, NMR. Ciò posto, i due poligoni *abcde*, ABCDE essendo simili (215), se si chiamano *a* ed A le loro superficie, si avrà (160) $a : A :: (ab)^2 : (AB)^2$; e medesimamente, se si chiamano *m* ed M le superficie dei due poligoni simili *mpq*, MPQ, si avrà $m : M :: (mp)^2 : (MP)^2$. Ora, a motivo dei triangoli simili *Sab*, SAB, si ha $ab : AB :: Sa : SA$; ed a motivo dei triangoli simili *Soa*, SOA, si ha $Sa : SA :: So : SO$; dunque $ab : AB :: So : SO$. Similmente, si troverà $mp : MP :: Nr :: NR$. Dunque, poichè $So = Nr$, ed $SO = NR$, si avrà $ab : AB :: mp :: MP$; ed (Alg. 132.) $(ab)^2 : (AB)^2 :: (mp)^2$:

(MP)². Ma si è trovato a : A :: $(ab)^2$: (AB)², ed m: M :: $(mp)^2$: (MP)²; dunque a : A :: m : M, o sia *alternando*, a : m :: A : M. Quindi l'area di ciascuna sezione *abcde* della prima piramide sta all'area di ciascuna sezione corrispondente *mpq* della seconda, nel rapporto costante della base ABCDE alla base MPQ. Dunque riguardando le due piramidi come composte d'un medesimo numero infinito di piani *abcde*, *mpq*, si concluderà (Alg. 128) che la somma dei piani che compongono la prima piramide, ossia la solidità della piramide essa stessa, sta alla somma dei piani che compongono la seconda, ossia la solidità di questa piramide, come la base della prima sta alla base della seconda.

219. COROLLARIO. Dunque se le basi di due piramidi della medesima altezza, sono eguali in superficie, le due piramidi saranno eguali in solidità.

220. TEOREMA III. *Una piramide triangolare è il terzo d'un prisma triangolare della medesima base e della medesima altezza.*

Sia il prisma triangolare ABCFED (Fig. 136). Si conducano da un angolo A le diagonali AD, AF nelle facce parallelogramme ABDE, ACFE, e si faccia passare un piano secondo queste diagonali: esso dividerà il prisma in due piramidi, una triangolare ADEF (Fig. 137.), l'altra quadrangolare ABCFD (Fig. 138). La prima ha la stessa base del prisma, e la sua altezza è la medesima di quella del prisma, poichè il suo vertice A è situato nella base superiore del prisma. Segliamo la seconda con un nuovo piano, condotto secondo gli spigoli AC, AD; formeremo due nuove piramidi ABCD, ACFD che hanno i loro vertici nel medesimo punto A, e per basi i triangoli eguali BCD, FDC. Dunque queste due piramidi sono eguali in solidità (219). Ora, se paragoniamo la piramide ABCD colla piramide ADEF, e se le con-

sideriamo come aventi i loro vertici nei punti D ed A, e per basi i triangoli BAC, DEF, vedremo che queste due piramidi sono eguali, poichè hanno altezze uguali e basi eguali. Dunque le tre piramidi ADEF, DBAC, ACFD, nelle quali il prisma è stato decomposto, sono eguali in solidità. Dunque una ADEF di esse, che ha la medesima base e la medesima altezza del prisma, ne è il terzo.

221. COROLLARIO. Dunque una piramide triangolare è il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza: poichè il prisma è uguale a questo prodotto intero (205).

222. PROBLEMA II. *Trovare la solidità di una piramide qualunque* SABCDE (Fig. 131).

Immaginiamoci una piramide triangolare NMPQ (Fig. 135), la cui altezza NR sia eguale all' altezza SO della piramide proposta. Chiamando S ed s le solidità di queste due piramidi, si avrà S: s :: base ABCDE : base MPQ : dunque S . . .

$$= \frac{s \times ABCDE}{MPQ}. \text{Ma } s = \frac{MPQ \times NR}{3} = \frac{MPQ \times SO}{3}; \text{ dun-}$$

$$\text{que } S = \frac{ABCDE \times SO}{3}; \text{ cioè a dire}$$ *la solidità d' una piramide qualunque è uguale al terzo del prodotto della sua base nella sua altezza.*

223. PROBLEMA III. *Determinare la solidità d' un tronco di piramide* ABCDE *abcde* (Fig. 131), *a basi opposte parallele.*

Questo tronco è, come si vede, la differenza delle due piramidi SABCDE, *Sabcde*, e per conseguenza ha per valore . . . .

$$\frac{ABCDE \times SO}{3} - \frac{abcde \times So}{3}.$$ Siccome le basi ABCDE, *abcde* sono date, restano solo a trovarsi le altezze

SO, So della piramide intera e della piramide troncata, per mezzo dell'altezza Oo del tronco, che è altresì data. Chiamo, per abbreviare, A la base ABCDE, *a* la sezione *abcde*, K l'altezza Oo del tronco. Abbiamo veduto che si ha A: *a*:: $(AB)^2$: $(ab)^2$:: $[SO]^2$: $[So]^2$; dunque (Alg. 132) $\sqrt{A}$: $\sqrt{a}$:: SO: So; il che dà *dividendo* (Alg. 127), $\sqrt{A}-\sqrt{a}:\sqrt{A}$:: Oo:So. Dunque $So=\frac{K\sqrt{A}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}$.

Similmente $So=\frac{K\sqrt{a}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}$. Quindi il solido del tronco $=\frac{KA\sqrt{A}}{3[\sqrt{A}-\sqrt{a}]}-\frac{Ka\sqrt{a}}{3[\sqrt{A}-\sqrt{a}]}=\frac{K}{3}$ $\times\left(\frac{A\sqrt{A}-a\sqrt{a}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}\right)$; donde si ricava (dividendo realmente $A\sqrt{A}-a\sqrt{a}$ per $\sqrt{A}-\sqrt{a}$) il tronco $=\frac{K}{3}$ $\times[A+a+\sqrt{A}\sqrt{a}]$: espressione che fa vedere, che *il solido del tronco è uguale alla somma di tre piramidi della medesima altezza di esso, e la prima delle quali abbia per base la base inferiore del tronco; la seconda abbia per base la base superiore: la terza per base, una media proporzionale geometrica fra le basi opposte del tronco.*

CAPO XI.

Misura della superficie e della solidità della Sfera.

224. La *Sfera* (Fig. 139) è un solido terminato da una superficie curva, tutti i punti della quale sono equidistanti da un punto interno C che ne è il centro.

Questo solido può riguardarsi come generato dalla rivoluzione del semicircolo ABE intorno al diametro AB. In questa rivoluzione, le ordinate EC, ON descrivono dei circoli EFDG, OHMI, i cui

centri C, N sono situati sul diametro AB. Quindi ogni sezione della sfera con un piano perpendicolare al diametro AB, è un circolo.

La sfera potendo egualmente riguardarsi come generata da ogni altro semicircolo MAV intorno al diametro MV, e le ordinate a questo diametro, descrivendo altresì dei circoli; dobbiamo concludere, in generale, che per qualunque verso si seghi una sfera con un piano, la sezione sarà sempre un circolo.

225. Il diametro intorno al quale il semicircolo generatore della sfera fa la sua rivoluzione, si chiama *asse di rivoluzione* o semplicemente *asse*.

226. I circoli che passano pel centro della sfera, ne sono i *circoli massimi*: gli altri ne sono i *circoli minori*.

Egli è chiaro che tutti i circoli massimi sono eguali; ma fra i minori, non vi sono se non quelli che passano ad eguali distanze dal centro che siano uguali.

227. Il solido AOHMI, compreso fra il circolo OHMI e la porzione di superficie sferica, che si appoggia sopra di esso, dicesi *segmento sferico*. Esso può riguardarsi come generato dal moto del semisegmento circolare ANO intorno all'ascissa o *saetta* AN. La superficie prodotta dall'arco AO, chiamasi *berretta sferica*; la superficie prodotta dall arco qualunque OEV dicesi *zona sferica*.

228. Se al segmento sferico si unisce il cono retto COHMI, l'aggregato COAM è un *settore sferico*. Questo solido può essere riguardato come prodotto dalla rivoluzione del settore circolare ACO intorno al raggio AC.

Per un'espressione di questa specie, *cir.* ON, intenderò la circonferenza che ha ON per raggio; e per *cerc.* ON, intenderà l'area del cerchio che ha ON per raggio.

229. PROBLEMA I. *Trovare la superficie d'una sfera.*

Consideriamo la sfera come prodotta dalla rivo-

luzione del semicircolo ABE [Fig. 140] intorno al diametro AB, e per conseguenza la sua superficie come prodotta dalla rivoluzione della semicirconferenza AEB: dividiamo questa semicirconferenza in un' infinità di elementi fg, con delle perpendicolari fp, gt all' asse di rivoluzione; egli è chiaro che ciascuno di questi elementi, che si può riguardare come una piccola linea retta, genera una zona sferica che può riguardarsi come la superficie convessa d' un piccolo tronco di cono retto, a basi parallele; dunque se dal punto h, mezzo di fg, conducasi la perpendicolare hu all'asse AB, la zona descritta da fg, avrà per valore $fg \times \text{cir}.hu$ (217). Guidiamo il raggio hc e la retta fk perpendicolare a gt; formeremo in tal guisa i due triangoli fkg, huc che hanno i lati perpendicolari ciascuno a ciascuno, e che sono per conseguenza simili; dunque $fg : fk$ o $pt :: hc : hu$; ma [126] $hc : hu ::$ cir. hc: cir. hu; dunque $fg : pt ::$ cir. hc: cir. hu; e per conseguenza $fg \times$cir. $hu = pt$ cir. hc. Laonde si vede che la piccola zona descritta da fg, è uguale al prodotto della piccola parte corrispondente pt del diametro AB per la circonferenza d' un circolo massimo della sfera. Dunque la somma di tutte queste zone, ossia la *superficie intera della sfera è eguale al prodotto* della somma di tutte le parti pt, ossia *del diametro* AB, *per la circonferenza d' un circolo massimo della sfera.*

230. COROLLARIO I. Si vede parimente che la superficie della berretta sferica generata dalla rivoluzione dell' arco qualunque Af, è uguale al prodotto della sua altezza o saetta Ap, per la circonferenza d' un circolo massimo della sfera, e che la superficie della zona sferica generata dalla rivoluzione dell' arco qualunque fEz, è uguale al prodotto della parte pm del diametro, compresa fra le perpendicolari fp, zm che descrivono le sue ba-

si opposte, per la circonferenza d' un circolo massimo della sfera.

231. COROLLARIO II. La superficie convessa d'un cilindro retto che avesse per base un circolo massimo della sfera, e per altezza un diametro di questa sfera, ovvero che fosse circoscritto alla sfera, avrebbe per espressione il prodotto della sua altezza nella circonferenza della sua base: e le parti di questa superficie, che avessero per altezza Ap ovvero pm, sarebbero eguali ai prodotti di queste altezze nella circonferenza della sua base [203]. Dunque la superficie della sfera è uguale alla superficie convessa del cilindro circoscritto: e la superficie d' una berretta o zona sferica è uguale alla parte corrispondente della superficie convessa del medesimo cilindro.

232. COROLLARIO III. La superficie della sfera è quadrupla di quella d' uno de suoi circoli massimi. Imperciocchè la superficie della sfera ha per valore il prodotto del diametro della circonferenza d' un circolo massimo: e la superficie d' un circolo massimo ha per valore la metà del prodotto del raggio per la circonferenza, ossia il quarto del prodotto del diametro per la circonferenza.

233. COROLLARIO IV. La superficie della berretta sferica generata dall' arco Aof (Fig. 141), è uguale alla superficie del circolo che avesse per raggio la corda Af. Perciocchè, se tirisi l' altra corda fB, i triangoli rettangoli simili Apf, AfB daranno

$$Ap : Af :: Af : AB :: \frac{Af}{2} : \frac{AB}{2} \text{ o } AC \text{ ; ovvero ,}$$

alternando $Ap : \frac{Af}{2} :: Af : AC$; ma $Af : AC ::$ cir. Af : cir. AC, dunque $Ap : \frac{Af}{2} ::$ cir. Af : cir. AC; il che dà $Ap \times$ circ. $AC = \frac{Af}{2} \times$ circ. Af: cioè a dire, il

valore della superficie della berretta sferica è uguale al valore della superficie del circolo che ha *Af* per raggio.

234. PROBLEMA II. *Trovare il solido d' una sfera.*

Immaginiamoci che la superficie della sfera sia divisa in un' infinità di parti che si possono riguardare come delle piccole superficie piane, le quali servono di basi ad un' infinità di piramidi che abbiano i loro vertici al centro: egli è chiaro che il solido della sfera sarà uguale alla somma di tutte queste piramidi. Ora, siccome esse hanno tutte la medesima altezza, che è il raggio della sfera, ne segue che la loro somma [222] è uguale al terzo del prodotto del raggio per la superficie della sfera, ossia al terzo del prodotto del raggio nel quadruplo d'un circolo massimo della sfera, ovvero ai due terzi del prodotto del diametro per un circolo massimo. Dunque anche *il solido della sfera è uguale ai due terzi del prodotto del diametro, per uno de' suoi circoli massimi.*

235. COROLLARIO I. Il solido del cilindro circoscritto alla sfera, ha per valore il prodotto della sua base per la sua altezza, cioè a dire, il prodotto d'un circolo massimo della sfera, nel diametro. Quindi la sfera è due terzi del cilindro che è ad essa circoscritto.

236. COROLLARIO II. Un settore sferico, prodotto dalla rivoluzione del settore circolare AC *fo* (Fig. 141.) intorno al raggio AC, può essere riguardato come composto d' una infinità di piramidi che hanno i loro vertici al centro C, e le loro basi sopra la superficie della berretta sferica, generata dall' arco A*of*. Quindi la solidità di questo settore è uguale al terzo del prodotto del raggio della sfera, per la superficie della berretta sferica, ovvero (233) per la superficie del circolo che ha per raggio la corda A*f*.

237. COROLLARIO III. Se dal solido del settore di cui abbiamo parlato, si sottragga il cono ret-

to generato dalla rivoluzione del triangolo rettangolo Cpf intorno a Cp, il residuo sarà il valore del segmento sferico generato dal semisegmento circolare $Apfo$, intorno ad Ap. Questo segmento ha dunque per valore. . . . .
$\frac{AC \times cerc. Af}{3} - \frac{Cp \times cerc. fp}{3}$. Essendo dato il raggio AC della sfera, ed essendo altresì data la saetta Ap, tutto sarà noto o determinabile nell'espressione precedente.

CAPO XII.

Paragone delle superficie e delle solidità dei corpi simili.

238. Due corpi o due solidi sono *simili*, quando sono terminati da un medesimo numero di facce simili, ciascuna a ciascuna, e similmente disposte, ciascuna per rapporto a ciascuna.

239. COROLLARIO I. In conseguenza di questa definizione, rappresentiamoci, al di dentro d' un corpo terminato da un numero qualunque di facce finite o infinitamente piccole, un punto che serva di vertice comune a delle piramidi che abbiano per basi le facce del corpo; immaginiamoci in seguito che ciascuna piramide sia segata parallelamente alla sua base, di modo tale che due piramidi abbiano uno spigolo comune al vertice ed alla base: l'aggregato delle piramidi interne formerà un solido simile al solido proposto, poichè questi due solidi hanno la condizione richiesta dalla definizione.

240. COROLLARIO II. Di quì si vede 1.° che due prismi retti sono simili, allorchè le loro basi sono poligoni simili, e le loro altezze sono proporzionali a due linee omologhe, prese nelle loro basi.

2.° Che due cilindri retti sono simili, allorchè le loro altezze sono proporzionali ai diametri o ai raggi delle loro basi.

3.° Che due cilindri obbliqui sono simili, allorchè sono egualmente inclinati, e le loro altezze sono proporzionali ai diametri o ai raggi delle loro basi.

4.° Che due piramidi regolari sono simili, allorchè le loro basi sono simili, e inoltre i loro apotemi stanno fra loro come gli apotemi delle basi.

5.° Che due coni retti sono simili, allorchè le loro altezze, o i loro lati, stanno come i diametri o i raggi delle loro basi.

6.° Che due sfere sono sempre simili; ec.

Difatti, se s' immagina che dei due solidi paragonati, il più piccolo sia posto al di dentro del più grande, di maniera che il medesimo punto rappresenti ad un tempo due punti corrispondenti nei due solidi, cioè a dire, due punti situati ai mezzi o ai terzi o ai quarti ec. di due linee corrispondenti; si vedrà che questi due solidi potranno essere riguardati come composti di un medesimo numero di facce simile e similmente situate: poichè queste facce avranno evidentemente tutti gli angoli eguali, ed i lati proporzionali intorno a questi angoli, e di più esse saranno disposte nel medesimo ordine, intorno al punto proposto.

241. TEOREMA I. *Le superficie di due piramidi simili sono fra loro come i quadrati di due linee omologhe in queste due piramidi.*

Due piramidi simili possono essere rappresentate dalle due piramidi SABCDE, *Sabcde* (Fig. 131.), la più piccola delle quali fa parte della più grande, e le cui basi sono parallele. Ora (215) i due poligoni ABCDE, *abcde* essendo simili, e tutti i triangoli ASB, BSC, CSD, ec. essendo simili cia-

scuno a ciascuno dei triangoli aSb, bSc, cSd, ec., si ha questa serie di rapporti eguali;

$$ABCDE : abcde :: (AB)^2 : (ab)^2$$
$$ASB : aSb :: (AB)^2 : (ab)^2$$
$$BSC : bSc :: (AB)^2 : (ab)^2$$
$$CSD : cSd :: (AB)^2 : (ab)^2$$
ec.

Quindi due facce omologhe qualunque nelle due piramidi, stanno fra loro nel rapporto costante di $(AB)^2$ ad $(ab)^2$. Dunque (Algeb. 127) la somma delle facce della prima piramide, ossia la superficie intera di questa piramide, sta alla somma delle facce della seconda, ossia alla superficie intera della seconda, come il quadrato d' una linea qualunque della prima, al quadrato della linea omologa della seconda.

Si vede parimente che due porzioni corrispondenti delle superficie di due piramidi simili, stanno fra loro come i quadrati di due linee omologhe.

242. COROLLARIO. Dunque, in generale, le superficie di due solidi simili, stanno fra loro come i quadrati di due linee omologhe in questi due solidi; poichè essi sono composti d' un medesimo numero di piramidi simili, due a due; e due piramidi vicine avendo uno spigolo comune al vertice o alla base, regna evidentemente il medesimo rapporto fra i quadrati delle linee omologhe, paragonati ciascuno a ciascuno.

Quindi le superficie di due prismi simili stanno fra loro come i quadrati delle altezze o di due linee omologhe prese nelle loro basi.

Le superficie di due sfere stanno fra loro come i quadrati dei raggi o dei diametri; ec.

243. TEOREMA II. *I solidi di due piramidi si-*

mili stanno fra loro come i cubi de' lati omologhi.

Consideriamo ancora le due piramidi SABCDE, *Sabcde* (Fig. 131.) : e siano SO, *So* le loro altezze. Si hanno queste due proporzioni.

$$\begin{aligned} ABCDE : abcde &:: (AB)^2 : (ab)^2, \\ SO : So &:: AB : ab; \end{aligned}$$

le quali essendo moltiplicate per ordine, danno $ABCDE \times SO : abcde \times So :: (AB)^3 : (ab)^3$. E quindi $\frac{ABCDE \times SO}{3}$ (1.ª piramide): $\frac{abcde \times So}{3}$ (2.ª piramide) $:: (AB)^3 : (ab)^3$.

244. COROLLARIO. Dunque in generale, due solidi simili stanno fra come i cubi de' lati omologhi. Imperciocchè due solidi simili possono essere riguardati come composti d' un medesimo numero di piramidi simili. E siccome, in ciascun solido, da una piramide all' altra, vi è uno spigolo comune al vertice e alla base, si vede che ciascuna piramide del primo solido sta alla piramide omologa del secondo, nel rapporto costante del cubo d' un lato del primo solido al cubo del lato omologo del secondo. Dunque la somma delle piramidi che compongono il primo solido, ossia questo solido esso stesso, sta alla somma delle piramidi che compongono il secondo, ossia a questo solido esso stesso, come il cubo d' un lato del primo solido sta al cubo del lato omologo del secondo.

Quindi i solidi di due prismi simili stanno fra loro come i cubi delle altezze o di due linee omologhe prese nelle loro basi.

I solidi di due sfere stanno tra loro come i cubi dei diametri o dei raggi, ec.

CAPO XIII.

Elementi di Trigonometria.

245. La *Trigonometria* è un ramo della Geometria, che ha per oggetto particolare *la risoluzione de' triangoli*, cioè a dire, l'arte di trovare le relazioni che gli angoli ed i lati d'un triangolo hanno tra di loro.

Essa si divide in due parti: una detta Trigonometria *piana* o *rettilinea*, che considera i triangoli rettilinei: l'altra detta Trigonometria *sferica*, che considera i triangoli sferici, cioè a dire, i triangoli formati sopra la superficie d'una sfera da tre archi di circoli massimi che si tagliano.

SEZIONE I.

Della Trigonometria rettilinea.

248. Se fra le sei cose, cioè tre angoli e i tre lati, che formano un triangolo rettilineo, ne siano note tre qualunque, la Trigonometria insegna a trovarne tre altre o *almeno i loro rapporti*: aggiungo questa restrizione, perchè se i tre angoli fossero le tre cose cognite, non si potrebbero determinare se non i rapporti dei lati, e non le loro grandezze assolute: e difatti tutti i triangoli simili (qualunque siano d'altronde le lunghezze dei lati) avendo tre angoli eguali ciascuno a ciascuno, egli è chiaro che la cognizione dei tre angoli d'un triangolo non può dare che i rapporti dei lati. Ma se fra le tre cose cognite si trova uno o più lati si potranno determinare i valori assoluti delle altre tre cose, come lo vedremo più sotto.

247. La Trigonometria, in vece di adoperare, nel calcolo degli angoli, gli archi che ne sono le misure, adopra certe linee che ne dipendono, e di cui prendiamo a dare le definizioni.

Da un punto C (Fig. 142), come centro, con un raggio CA arbitrario, ma dato, si descriva una circonferenza di circolo: dal medesimo punto s' innalzi sopra il diametro AI il raggio perpendicolare CF: da un punto qualunque B, preso sul quarto di circonferenza ABF, conducasi il raggio BC, a fine di avere gli angoli ACB, BCF, che sono *complementi* l' uno dell' altro, e gli angoli ACB, BCI, che sono *supplementi* l' uno dell' altro: dal medesimo punto B si abbassino le perpendicolari BD, BH sopra i raggi CA, CF: dai punti A ed F s' innalzino perpendicolarmente ai medesimi raggi le rette AE, FG, che incontrino in E e G il raggio CB prolungato. Ciò posto si chiama

Dell' arco AB, o dell' angolo ACB	Dell' arco FB, o dell' angolo FCB
AB *seno*	BH *seno*
AD *seno verso*	FH *seno verso*
CD o BH *coseno*, cioè a dire, *seno del complemento*.	CH o BD *coseno*, cioè a dire, *seno del complemento*
AE *tangente*,	FG *tangente*
FG *cotangente*, cioè a dire; *tangente del complemento*	AE *cotangente*, cioè a dire, *tangente del complemento*
CE *secante*	CG *secante*
CG *cosecane*, cioè a dire, *secante del complemento*.	CE *cosecante*, cioè a dire, *secante del complemento*.

Quindi il seno d' un arco è la perpendicolare abbassata da una delle estremità di quest' arco sopra il raggio che passa per l' altra estremità: il cose-

no, o il seno del complemento, è la parte del raggio, compresa dopo il centro sino al seno; ec.

248. Osservazione. Egli è chiaro, dalle definizioni precedenti, 1.° che due archi AB, BFI, supplementi l'uno dell'altro, hanno il medesimo seno BD.

2.° Che il seno d'un arco qualunque è la metà della corda dell'arco doppio; perciocchè, se si prolunga BD sino in K, il raggio CA che è perpendicolare alla corda BK, divide questa corda e l'arco BAK, o BIK, ciascuno in due parti eguali (78).

3.° Se a ciascuno degli archi AB, BFI si aggiunga la circonferenza intera, o un multiplo della circonferenza, il seno rimarrà ancora lo stesso per l'una e l'altra somma; poichè, facendo partire dal punto B la circonferenza o il multiplo della circonferenza, che si aggiunge, l'altra estremità viene necessariamente a cadere sopra il medesimo punto B.

4.° Un arco AFIN, maggiore della semicirconferenza, ha egualmente per seno la perpendicolare NP, abbassata dalla sua estremità N sopra il raggio IC, prolungato, che passa per l'altra estremità A. Ma, supponendo che si riguardino come quantità positive i seni BD, FC, *bd* di tutti gli archi AB, AF, AF*b*, che sono situati sopra il diametro AI, bisognerà riguardare il seno NP che cade al di sotto, e che è per conseguenza situato in senso contrario, come una quantità negativa. Imperciocchè, in generale (Alg. 19), le quantità negative devono essere prese in senso contrario delle quantità positive.

5.° I due archi AB, BFI, supplementi l'uno dell'altro, hanno dei coseni eguali, ma posti in senso contrario. Difatti, se si prenda l'arco AF*b* eguale all'arco BFI, e si conduca *bd* perpendicolare ad AI, le due linee CD, C*d*, che sono evi-

dentemente uguali, e poste in versi contrarj per rapporto al centro C, esprimeranno, l' una il coseno dell' arco AB, l' altra il coseno dell' arco AFb o dell' arco BFI. Quindi riguardando CD come una quantità positiva, bisognerà riguardare Cd come una quantità negativa.

6.° Se dal punto I conducasi una tangente all' arco BFI, essa non potrà mai incontrare il raggio CB, comunque si prolunghi nel senso CB; ma se si prolunghi nel senso opposto CL, la tangente IM incontrerà questo prolungamento in M. Allora le linee IM, CM, che sono situate in versi contrarj alle linee AE, CE, esprimono, l' una la tangente, l' altra la secante dell' angolo ottuso BCI. E siccome si ha evidentemente IM=AE, CM=CE, si vede che un angolo ottuso ha per tangente, la tangente del suo supplemento, presa negativamente, e per secante, la secante del suo supplemento, presa altresì negativamente.

7.° Prendendo (come sopra n.° 5) l' arco AFb =all' arco BFI, e guidando la tangente Fg dell' arco Fb, questa tangente che è la cotangente dell' arco AFb o dell' arco BFI, supplemento dell' arco AB, è uguale e contraria alla cotangente FG dell' arco AB. Quindi un arco ed il suo supplemento hanno delle contangenti eguali, ma di segni contrarj.

8.° Il seno d' un arco zero è zero, ed il suo coseno è il raggio: il seno d' un arco di 90° è il raggio, ed il suo coseno è zero: il seno d' un arco di 180° è zero, ed il suo coseno è il raggio preso negativamente. Tutti i seni e coseni sono compresi fra questi due limiti, zero ed il raggio preso positivamente o negativamente. Il raggio si chiama qualche volta *seno totale*. Quando alle tangenti ed alle secanti, esse aumentano dopo zero sino all' infinito positivo o negativo.

Si sono costruite per l' uso dei calcoli trigonometrici, delle Tavole che contengono i valori delle linee BD, CD, AE, ec. in parti del raggio, coi loro logaritmi. Eccone i principj.

Costruzione delle Tavole trigonometriche.

249. PROBLEMA I. *Trovare i seni ed i coseni d' una serie di archi che formano una progressione geometrica decrescente, la cui ragione è 2.*

1.° Abbiamo veduto (171) che conoscendo in generale il lato AB (Fig. 116) d' un poligono regolare, cioè a dire, il valore di AB per rapporto al raggio, si avrà l' apotema CM, col sottrarre dal quadrato del raggio il quadrato della metà AM di AB, e con cavare la radice quadrata dal residuo. Ora AM è il seno dell' angolo OCA o dell' arco O*u*A, e CM ne è il coseno. Quindi, conoscendosi il seno d' un arco O*u*A, si può determinare il coseno.

2.° Per mezzo della corda AB, che è il doppio del seno dell' arco A*u*O, si può determinare (172) la corda AO d' un arco che è soltanto la metà dell' arco AOB; dunque si conoscerà eziandio la metà della corda AO, ossia il seno d' un angolo che non è che la metà dell' angolo OCA. Per mezzo di questo seno si calcolerà il coseno, come si è spiegato, e così di seguito.

Supponiamo, per esempio, che l' arco primitivo AOB sia di 60 gradi cioè la sesta parte della circonferenza: allora la corda AB è uguale al raggio, come si è veduto (175) e per conseguenza il seno d' un angolo OCA di 30 gradi, è la metà del raggio; si calcolerà il coseno pel numero primo del presente articolo. Conoscendo così il seno ed il coseno d' un arco di 30 gradi; si potrà determinare il seno ed il coseno dell' arco suddupla,:

cioè a dire, dell' arco di 15.° : per mezzo del seno e del coseno di quest' ultimo arco, si calcolerà il seno ed il coseno dell' arco sudduplo, cioè a dire, dell' arco di 7.° 30′; così di seguito.

250. COROLLARIO I. Conoscendo il seno, e per conseguenza anche il coseno d' un arco AB (Fig. 142), si potrà determinare il seno verso, la tangente, la secante, ec. Imperciocchè primieramente si avrà il seno verso, sottraendo dal raggio il coseno. Le altre linee AE, CE, ec. si trovano colle proporzioni seguenti, che danno i triangoli simili, ed in ciascuna delle quali sono noti i tre primi termini. Chiamo R il raggio, A l' arco AB, che è preso per arco principale; e metto a canto di ciascuna proporzione, la sua traduzione in linguaggio trigonometrico

$$CD:BD::CA:AE,\ (\ \text{cos. }A : \text{sen. }A :: R : \text{tang.}A = \frac{R\,\text{sen.}A}{\text{cos. }A}$$

$$CD:CA::CB:CE,\ (\ \text{cos. }A : R :: R : \text{sec. }A = \frac{R^2}{\text{cos. }A}$$

$$\text{o}\left.\begin{matrix}BD\\CH\end{matrix}\right):BH::CF:FG,\left(\ \text{sen.}A:\text{cos.}A::R:\text{cot.}A = \frac{R\,\text{cos.}A}{\text{sen. }A}\right.$$

$$\text{o}\left.\begin{matrix}BD\\CH\end{matrix}\right):CF::CB:CG,\left(\ \text{sen.}A:R::R:\text{cosec.}A = \frac{R^2}{\text{sen. }A}\right.$$

251. COROLLARIO II. Le tangenti di due archi differenti A e B, stanno fra loro in ragione inversa delle cotangenti degli archi medesimi; perciocchè tang. A× cotang. A=R², e similmente tang. B× cotang. B=R²; dunque tang. A× cotang. A= tang. B× cotang. B: il che dà tang. A : tang. B :: cotang. B : cotang. A.

252. PROBLEMA II. *Essendo dati i seni BD, EF di due archi AB, BE (Fig. 143) : trovare i seni ed i coseni della somma e della differenza degli archi medesimi.*

Prolungo EF sino in G; il che dà $FG=EF$, arc. BG=arc. BE, e per conseguenza arc. AG=arc. AB —arc. BE: conduco, perpendicolarmente al raggio CA, le rette EL, FM, GH: e parallelemente allo stesso raggio, le rette FI, GK. Egli è chiaro che $IK=EI$, ed FI ossia $OK=OG=MH=ML$, nella stessa maniera che $FG=FE$. Da un altro canto (chiamando R il raggio, A l'arco AB, B l' arco BE), si ha $EL=\text{sen.}(A+B)$, $CL=\cos.(A+B)$, $GH=\text{sen.}(A-B)$, $CH=\cos.(A-B)$.

Ciò posto, i triangoli BCD, EIF, che hanno i lati perpendicolari ciascuno a ciascuno, e che sono per conseguenza simili (114), danno queste proporzioni . . . .

$$CB\,(R):CD\,(\cos.A)::EF\,(\text{sen.}B):EI=\frac{\cos.A\,\text{sen.}B}{R},$$

$$CB(R):BD\,(\text{sen.}A)::EF\,(\text{sen.}B):FI=\frac{\text{sen.}A\,\text{sen.}B}{R},$$

I triangoli simili CBD, CFM danno . . . .

$$CB(R):BD\,(\text{sen.}A)::CF\,(\cos.B):FM=\frac{\text{sen.}A\cos.B}{R},$$

$$CB\,(R):CD\,(\cos.A)::CF\,(\cos.B):CM=\frac{\cos.A\cos.B}{R}.$$

Ora $EL=IL+EI=FM+EI$; $CL=CM-ML=CM-FI$; $GH=KL=IL-KI=FM-EI$; $CH=CM+HM=CM+FI$; dunque . . . .

$$\text{sen.}(A+B)=\frac{\text{sen.}A\cos.B+\cos.A\,\text{sen.}B}{R},$$

$$\cos.(A+B)=\frac{\cos.A\cos.B-\text{sen.}A\,\text{sen.}B}{R},$$

$$\text{sen.}(A-B)=\frac{\text{sen.}A\cos.B-\cos.A\,\text{sen.}B}{R},$$

$$\cos.(A-B) = \frac{\cos. A \cos. B + \text{sen}. A \,\text{sen}. B}{R}.$$

253. COROLLARIO I. Quando B=A, cioè a dire, quando gli archi proposti sono eguali, si ha

$$\text{sen}. 2A = \frac{2. \,\text{sen}. A \cos. A}{R},$$

$$\cos. 2A = \frac{(\cos. A)^2 - (\text{sen}. A)^2}{R}.$$

254. COROLLARIO II. Siccome si ha in generale $(BD)^2 + (CD)^2 = (CB)^2$, cioè a dire, $(\text{sen}.A)^2 + (\cos. A)^2 = R^2$, o $(\text{sen}. A)^2 = R^2 - (\cos. A)^2$; e che, in virtù dell'articolo precedente, $(\cos. A)^2 = R \cos. 2A + (\text{sen}. A)^2$: si avrà $2(\text{sen}. A)^2 = R^2 - R. \cos. 2A$; cioè a dire, che *il doppio del quadrato del seno d'un angolo è uguale al quadrato del raggio, meno il prodotto del raggio nel coseno dell'angolo doppio.*

255. SCOLIO. I due problemi precedenti bastano per costruire le Tavole trigonometriche. Difatti, abbiamo veduto (249) che partendo dall'arco di 30 gradi, il cui seno è uguale alla metà del raggio, si possono calcolare i seni di tutti gli archi compresi nella progressione geometrica decrescente $\div 30^\circ : \frac{30^\circ}{2} : \frac{30^\circ}{4} : \frac{30^\circ}{8} : \frac{30^\circ}{16} :$ ec. Prendiamo in questa progressione un arco picciolissimo, e per fissare le idee, supponiamo, per esempio, che questo piccolo arco sia 1''. Conoscendo il seno di quest'arco, potremo trovare (252. e 250.) i seni, coseni, tangenti ec. di tutti gli archi compresi nella progressione aritmetica crescente $\div$ 1''. 2''. 3''. 4''. 5''. ec.: progressione che si può continuare sino a 90°, ove corrisponde il massimo di tutti i seni, che è il raggio. Egli è dunque evidente che si a-

vranno, in parti del raggio, i seni, coseni, tangenti, ec. di tutti gli archi dopo 1″ sino a 90°.

Supponiamo, per esempio, che il raggio sia rappresentato dal numero 100000; il seno di 25°, 30′ sarà rappresentato da 39875; la sua tangente da 43481; la sua secante da 109044; ec.

Il raggio ed i seni, coseni, tangenti, ec. essendo così espressi per mezzo di numeri che si riferiscono ad una stessa unità, potremo determinare i logaritmi di questi numeri, coi principj che sono stati dati nell' Algebra. Quindi abbiamo tutti i *dati* necessarj per costruire delle Tavole che contengono i seni, coseni, tangenti, ec., coi logaritmi che loro corrispondono. Vi sono dei mezzi per abbreviare considerabilmente, nella pratica, i calcoli di queste Tavole; ma noi non spiegheremo qui queste abbreviazioni; ci basta che si vegga la possibilità di costruire le Tavole di cui si tratta.

I primi Matematici che intrapresero di calcolare queste sorti di Tavole, supposero che il raggio fosse rappresentato da 10000000000, cioè a dire, dall' unità seguita da 10 zeri. In conseguenza, il logaritmo del raggio aveva 10 per caratteristica. Ma, in seguito, si sono soppressi alcuni zeri nel valore del raggio, e si è nondimeno conservata sempre la medesima caratteristica al suo logaritmo. Per esempio, nelle Tavole che BOUGUER ha dato nel suo *Trattato di Navigazione*, il raggio è espresso semplicemente da 100000, e gli si attribuisce un logaritmo che ha 10 per caratteristica. Ma ciò non ha alcun inconveniente; perchè le caratteristiche dei logaritmi di tutti i seni, coseni, tangenti, ec. ivi sono relative alla caratteristica del logaritmo del raggio o seno totale.

Nella maggior parte delle Tavole, non si trovano le secanti e le cosecanti, nè i loro logaritmi. Noi vedremo difatti che queste linee sono inutili per la risoluzione completa dei triangoli.

256. Risolvere un triangolo, è trovare gli angoli o i lati di questo triangolo, che possono essere incogniti. Ora, per mezzo delle Tavole trigonometriche, si conoscono gli angoli dai valori dei loro seni, coseni, tangenti, ec. Quì adunque non si tratta che di stabilire i principj da cui dipendono le relazioni fra i lati d' un triangolo, ed i seni, coseni, tangenti, ec. dei suoi angoli.

257. TEOREMA I. *In ogni triangolo rettangolo ABC (Fig. 144.), l' ipotenusa AC sta ad uno dei lati AB, come il raggio al seno dell' angolo C opposto al lato AB.*

Imperciocchè, supponendo che CF rappresenti il raggio, ed abbassando la perpendicolare FE sopra CB prolungato, i triangoli rettangoli simili (*) ABC, FEC danno AC : AB :: FC (R) : FE (sen. C).

258. TEOREMA II. *In ogni triangolo rettangolo ABC, un lato CB sta all' altro lato AB, come il raggio alla tangente dell' angolo opposto al secondo lato.*

Imperciocchè sia CF o CH il raggio, ed HK la tangente dell' arco HF, o dell' angolo C: i triangoli simili CBA, CHK danno CB : AB :: CH (R) : HK (tang. C).

259. TEOREMA III. *In ogni triangolo rettilineo ABC (Fig. 145), i seni di due angoli stanno fra loro come i lati opposti a questi angoli; cioè a dire, che si ha per esempio, sen. B : sen. C :: A C : A B.*

Sia presa, per raggio, la retta CF eguale ad AB,

(*) Denotando un triangolo rettangolo con tre lettere, suppongo sempre che quella di mezzo corrisponda all' angolo retto.

e siano abbassate, dai punti F ed A, le perpendicolari FE, AD, sopra CB: egli è chiaro che AD sarà il seno dell'angolo B, ed FE il seno dell'angolo C. Ora i triangoli simili CDA, CEF danno AD (sen. B) : FE (sen. C) :: AC : FC o AB.

260. TEOREMA IV. *In ogni triangolo rettilineo ABC (Fig. 146.), si ha questa proporzione: la somma di due lati sta alla loro differenza, come la tangente della semisomma dei due angoli opposti a questi lati, sta alla tangente della loro semidifferenza; cioè a dire, che si ha, per esempio,*

$$BC+BA : BC-BA :: tang. \frac{A+C}{2} : tang. \frac{A-C}{2}.$$

Dal punto B, come centro, col minore BA dei due lati proposti, descrivasi una circonferenza di circolo: si prolunghi CB verso E, e si conducano le corde AE, AD: in fine sia condotta la retta DF, parallela ad EA. Egli è chiaro che le rette EA, DF sono perpendicolari a DA, poichè l'angolo EAD è retto (86). I triangoli simili CEA, CDF danno CE : CD :: EA : DF : proporzione che racchiude l'enunziato Teorema. Difatti, 1.° CE=BC+BA, e CD=BC−BA: 2.° L'angolo EDA non avendo per misura (85) che la metà dell'arco AXE, è perciò la metà dell'angolo EBA che ha per misura quest'arco intero (26). Ora l'angolo EBA vale (72) la somma dei due angoli, BAC, BCA; dunque, prendendo AD per raggio o per seno totale, AE è la tangente di $\frac{A+C}{2}$. 3.° Ang. CAD = ang. BAC −ang. BAD=ang. BAC−ang. BDA. Ora (72) ang. BDA =ang. CAD+ang. BCA; dunque ang. CAD=ang. BAC −ang. CAD—ang. BCA; il che dà 2 ang. CAD =ang. BAC—ang. BCA, ossia ang. CAD . . . .

$= \frac{\text{ang.BAC}-\text{ang.BCA}}{2}$; quindi, prendendo ancora AD per seno totale, DF è la tangente di $\frac{A-C}{2}$.

Dunque finalmente la proporzione CE : CD :: EA : DF, si può tradurre così, BC+BA : BC—BA :: tang. $\frac{A+C}{2}$: tang. $\frac{A-C}{2}$.

261. COROLLARIO. Dunque, se nel triangolo *ABC* si conoscano i lati *BC*, *AB*, e l'angolo compreso *B*, si potranno determinare gli angoli *A* e *C*. Imperciocchè (69) la somma dei tre angoli *A*,*B*,*C*, del triangolo *ABC* vale 180°; quindi, sottraendo l'angolo *B* da 180°, si conoscerà *A*+*C*, per conseguenza anche $\frac{A+C}{2}$. In seguito, per mezzo della proporzione, *BC*+*BA* : *BC*—*BA* :: tang. $\frac{A+C}{2}$: tang. $\frac{A-C}{2}$ (nella quale i tre primi termini sono cogniti) si troverà tang. $\frac{A-C}{2}$, e per conseguenza $\frac{A-C}{2}$. Ora il maggiore *A* dei due angoli *A* e *C* (il quale è opposto al maggiore dei due lati dati) vale $\frac{A+C}{2}+\frac{A-C}{2}$, cioè a dire, la metà della loro somma, più la metà della loro differenza; ed il minore *C* vale $\frac{A+C}{2}-\frac{A-C}{2}$, cioè a

dire, la metà della loro somma, meno la metà della loro differenza; quindi si conoscerà in particolare ciascuno degli angoli A e C.

262. TEOREMA V. *In ogni triangolo rettilineo si ha questa proporzione; il prodotto di due lati sta alla radice quadrata d'un prodotto di quattro dimensioni, risultante dalla moltiplica della semisomma dei tre lati pei tre eccessi di questa semisomma sopra ciascuno dei lati; come il doppio del raggio sta al seno dell' angolo compreso fra i due lati, il cui prodotto compone il primo termine della proporzione.*

Da un angolo A del triangolo ABC (Fig. 147 e 148) abbassate la perpendicolare AO sul lato opposto, prolungato, se è necessario. Il triangolo rettangolo AOC darà (257) AC : AO :: R: sen.ACO o sen. ACB. Dunque questo seno$=\frac{AO\times R}{AC}$. Cerchiamo la perpendicolare AO per mezzo dei lati del triangolo.

Si è trovato (170) CO = ... $\frac{\pm(AB)^2\mp(AC)^2\mp(BC)^2}{2BC}$; ed il triangolo rettangolo AOC dà $(AO)^2=(AC)^2-(CO)^2$. Ora, in generale, la differenza di due quadrati M^2 ed N^2, cioè a dire, $M^2-N^2=(M+N)\times(M-N)$, come si vede effettuando la moltiplica indicata dal secondo membro. Quindi $(AO)^2=(AC+CO)\times(AC-CO)$. Sostituendo, in vece di CO il suo valore, si avrà . . . . .

$$(AO)^2=\left(AC\frac{\mp(AB)^2\mp(AC)^2\mp(BC)^2}{2BC}\right) \ldots$$

$$\times\left(AC\frac{\mp(AB)^2\pm(AC)^2\pm(BC)^2}{2BC}\right),$$ ovvero $[AO]^2\times4[BC]^2=[AC\times2BC\pm[AB]^2\mp[AC]^2\mp[BC]^2]$ . . .

$\times[[AC\times 2BC] \mp [AB]^2 \pm [AC]^2 \pm [BC]^2]$. Ora, prendendo primieramente i segni superiori, si vede che il primo fattore $AC\times 2BC+(AB]^2-[AC]^2-[BC]^2 =[AB]^2-[AC-BC]^2=[AB+AC-BC]\times[AB-AC+BC]$; e che il secondo fattore $AC\times 2BC-[AB]^2+[AC]^2+[BC]^2=[AC+BC]^2-[AB]^2=[AC+BC+AB]\times[AC+BC-AB]$. Medesimamente, prendendo i segni inferiori, si vede che il primo fattore $AC\times 2BC-[AB]^2+[AC]^2+[BC]^2=[AC+BC]^2-[AB]^2=[AC+BC+AB]\times[AC+BC-AB]$; e che il secondo fattore $AC\times 2BC+[AB]^2-[AC]^2-[BC]^2 =[AB]^2-[AC-BC]^2=[AB+AC-BC]\times(AB-AC+BC]$. Per conseguenza, si ha nell' uno, e nell'altro caso, $[AO]^2\times 4[BC]^2=[AB+AC+BC]\times[AB+AC-BC]\times[AB+BC-AC]\times[AC+BC-AB]$; ovvero $[AO]^2\times[BC]^2$ . . . .

$$= 4\left(\frac{AB+AC+BC}{2}\right)\times\left(\frac{AB+AC-BC}{2}\right)\times\left(\frac{AB+BC-AC}{2}\right)\times\left(\frac{AC+BC-AB}{2}\right).$$

Laonde si ricava (chiamando S la semisomma dei tre lati, ed osservando che $\frac{AB+AC-BC}{2}$ . . . . . .

$= \frac{AB+AC+BC}{2} - BC$, che $\frac{AB+BC-AC}{2}$ . . .

$= \frac{AB+BC+AC}{2} - AC$, che $\frac{AC+BC-AB}{2}$

$= \frac{AB+BC+AB}{2} - AB$), AO . . . .

$$= \frac{2\sqrt{(S\times(S-BC)\times(S-AC)\times(S-AB))}}{BC}$$

Sostituendo questo valore di AO nell' equazione sen. ACO ossia sen. ACB $= \frac{AO \times R}{AC}$, si avrà per l' espressione del seno di cui trattasi.

$$\frac{2R \times \sqrt{(S \times (S-BC) \times (S-AC) \times (S-AB))}}{BC \times AC} \ldots$$

Donde risulta la proporzione che forma l' enunziato del Teorema.

263. Osservazione. Siccome un angolo acuto ed il suo supplemento hanno il medesimo seno, possiamo essere incerti, se l' espressione che abbiamo trovata, sia quella del seno dell' angolo ottuso ACB (Fig. 147), o quella dell' angolo acuto ACB (Fig. 148). Ma ci leveremo da quest' incertezza, osservando che, se un triangolo è nel caso di avere un angolo ottuso, quest' angolo è necessariamente (73) quello che è opposto al lato maggiore, e che gli altri due angoli saranno acuti (70). Donde risulta questa regola. *Cercate, colla formola precedente, i seni dei due angoli opposti ai due lati minori del triangolo; questi due angoli sono acuti. Sottraete la loro somma da 180° il residuo sarà l' angolo opposto al lato maggiore; e quest' angolo sarà acuto o ottuso, secondo che il residuo della sottrazione sarà minore o maggiore di 90 gradi.*

264. SCOLIO generale. A norma di questi principj, andiamo a presentare in un quadro succinto la risoluzione dei triangoli rettilinei per tutti i casi possibili. La cosa incognita è sempre uno dei termini d' una proporzione, nella quale i tre altri sono cogniti; e conseguentemente essa pure sarà cognita (Algeb. 125).

Tav. I. *Risoluzione dei triangoli rettangoli* (Fig. 149.)

casi	dati	trovare	soluzione
1	l' ipotenusa AC e gli angoli	Un lato AB	R : sen. C : : AC : AB (257).
2	l' ipotenusa AC ed un lato AB	Gli angoli	AC : AB : : R : sen C; A=90°—C (69).
3	l' ipotenusa AC ed un lato AB	L' altro lato BC	Cercate gli angoli pel secondo caso : ed in seguito il lato BC pel primo.
4	Gli angoli ed un lato AB	l' ipotenusa AC	Sen. C : R : : AB : AC
5	Gli angoli ed un lato BC	L' altro lato AB	R : tang. C : : BC : AB (258).
6	I due lati AB e BC	Gli angoli	AB : BC : : R : tang. A; C=90°—A.
7	I due lati AB e BC	l' ipotenusa AC	Cercate gli angoli pel sesto caso; ed in seguito l' ipoten. pel quarto.

Tav. II. *Risol. dei triang. obbliquangoli* (Fig. 150, 151)

casi	dati	trovare	soluzione
1	Gli angoli C e B, ed un lato AB	Ciascuno degli altri lati AC, BC	Sen. C: sen. B :: AB : AC (259), A=180°—B—C (69); Sen. C : sen. A :: AB : BC.
2	I due lati AB, AC; e l'angolo B opposto ad uno di essi	Gli angoli C ed A	AC: AB :: sen. B: sen. C; A=180°—B—C.
3	I due lati AB, AC, e l'angolo B opposto ad AC	L' altro lato BC	Cercate prima gli angoli (caso precedente); ed allora avrete sen. C: sen. A :: AB: BC.
4	I due lati AB, AC, e l'angolo compreso A	Gli angoli C e B	AB+AC: AB—AC :: tang. $\frac{B+C}{2}$: tang. $\frac{C-B}{2}$ (260). Si conosceranno dunque (261) C e B.
5	I due lati AB, AC, e l'angolo compreso A	L' altro lato BC	Cercate gli angolo pel caso precedente; ed in seguito cercate BC pel primo caso.
6	I tre lati	Gli angoli	Cercate gli angoli per mezzo dell' art.° 263.

265. Osservazione. Il 2.° ed il 3.° caso dei triangoli obbliquangoli hanno due soluzioni, quando il lato AC, opposto all'angolo dato B, è minore dell' altro lato dato AB; perciocchè se dal punto A, come centro, si descriva l' arco CxC', si vedrà che l' angolo ACC' o AC' C ed il suo supplemento avendo il medesimo seno, i *dati* sono i medesimi pei due triangoli ABC, ABC'. Questi due triangoli non ne formano che un solo, quando l' angolo cercato è retto. L' angolo dato B non può essere maggiore dell' angolo ABx, formato dal lato BA e dalla tangente Bx dell' arco CxC'.

Se essendo sempre dati i lati AB, AC, fosse dato di *specie* l' angolo C, opposto al maggiore AB di questi lati, non vi sarebbe che una soluzione: ve ne sarebbero due, se si conoscesse semplicemente sen. C.

Applicazioni ad alcuni esempj.

Esempio I. *Trovare l' altezza PS d' una torre verticale* (Fig. 152.) *a cui si possa accostare.*

Prendo sul terreno, supposto orizzontale, contando dal piede P della torre, una retta PC di lunghezza arbitraria, ma data, per esempio, di 64 tese; al punto C, misuro coll' istrumento detto *grafometro*, posto verticalmente, l' angolo PCS; sia quest' angolo di 38°, 51'. Ho dunque così un triangolo rettangolo PCS, che mi dà (caso 5°. dei triangoli rettangoli), R : tang. 38° 51' :: CP : PS.

Operando coi logaritmi, si avrà:	Log. tang. 38.° 51′ = 9, 9060431 log. 64 = 1, 8061800 11, 7122231 log. R = 10, 0000000 log. PS = 1, 7122231.

Dunque PS=51$^{tes.}$ 3$^{pi.}$ 3$^{po.}$, ad un di presso.

Esempio II. *Trovare l'altezza d'una torre verticale* PS (Fig. 153.), *al piede della quale non si possa accostare.*

Prendo sul terreno orizzontale una base CA che sia nella direzione della torre (il che si fa situando la palina A, di maniera che il raggio visuale diretto da A verso C, vada ad incontrare la retta SP); misuro, col grafometro posto verticalmente, gli angoli SCA, SAC. Siano CA=36 tese, ang. SCA=115,° 12′ ang. SAC=28.° 43′, e per conseguenza ang. ASC=36°, 5′. Ciò posto, 1.° si avrà (cas. 1. dei triangoli obbliquangoli (sen. 36.° 5′ : sen. 28.° 43′ : : 36 tese : CS.

Operando coi logaritmi, si avrà:	Log. sen. 28.° 43′ = 9, 681674 log. 36 = 1, 556303 somma 11, 237977 log. sen. 36°. 5′ = 9, 770087 log. CS = 1, 467890

2.° L'angolo SCP, supplemento di SCA, essendo di 64°. 48′, si ha (caso 1° dei triangoli rettangoli) R : sen. 64°. 48′ : : CS : SP.

Operando coi logaritmi, si avrà:	Log. sen. 64°. 48′ = 9, 956566 log. CS = 1, 467890 somma 11, 424456 log. R = 10, 000000 log, PS = 1, 424456.

Dunque PS=26$^{\text{tes.}}$, 578. ad un di presso.

Esempio III. *Trovare la distanza da un punto* B *ad un oggetto* S, *a cui non si possa accostare* (Fig. 154).

Misuro sul terreno una base BA; dirigo, dalle sue estremità, verso un medesimo punto S dell'oggetto proposto, i raggi visuali BS, AS; e misuro, per mezzo del grafometro, gli angoli SBA, SAB, il che mi fa conoscere l'angolo ASB. In seguito trovo BS colla proporzione, sen. S : sen. A :: BA : BS.

Siano, per esempio, BA = 192 tese; A = 87°. 28′; B=82°. 53′, e per conseguenza S=90°. 39′. Si troverà BS=1144 tese circa.

Esempio IV. *Trovare la distanza* CD (Fig. 155.) *di due oggetti* C *e* D *inaccessibili.*

Prendete sul terreno una base BA, dalle estremità della quale possiate vedere i due oggetti C e D, misurate col grafometro, gli angoli CBD, CBA, DBA, CAB, BAD (il che comprende il caso in cui i quattro punti, C, D, B, A, non fossero in un medesimo piano. Ciò posto, 1.° nel triangolo CBA, gli angoli B ed A, e per conseguenza anche l'angolo C: si troverà BC colla proporzione, sen. C : sen. A :: *AB* : *BC*: 2.° Nel triangolo *BAD* si conosce *BA*, e gli angoli B ed *A*, e per conseguenza anche l'angolo D: si troverà BD colla proporzione, sen. D : sen *A* :: BA : BD. 3.° Nel triangolo CBD, si conoscono BC,

BD, e l'angolo compreso B; si troveranno gli angoli C e D, ed il lato CD, pei casi 4.° e 5.° dei triangoli obbliquangoli.

Supponiamo, per esempio, che i punti C, D, B, A siano in un medesimo piano, e che siasi trovato BA=42 tese; ang. CBD=17.°8'; CBA=55.°39'; e conseguentemente DBA=38.°31'. In seguito, CAB =48.°29'; BAD=72.° 10'. Si troverà BC=32$^{tes.}$, 453; BD=42$^{tes.}$, 759; CD=15$^{tes.}$, 308.

Esempio V. *Trovare sotto qual angolo un occhio situato al punto dato A* (Fig. 156) *veda la facciata data CD d' una fabbrica.*

Egli è chiaro che la questione riducesi a trovare gli angoli d' un triangolo ACD, di cui sono noti i tre lati; problema che si riferisce al caso 6.° dei triangoli obbliquangoli.

Siano, per esempio, CD=100, tese, CA=150 tese, AD=200 tese: si troverà l' angolo A=28.° 57', ad un di presso.

SEZIONE II.

Della Trigonometria Sferica.

266. Un triangolo sferico ABC (Fig. 157) è come lo abbiamo già insinuato, lo spazio compreso sopra la superficie d' una sfera, il cui raggio è supposto cognito, da tre archi AB, AC, BC di circoli massimi che si tagliano. Questi archi si chiamano i *lati* del triangolo.

267. Siccome ogni circolo massimo d' una sfera passa pel suo centro, la sezione comune di due circoli massimi, che è una linea retta (185), passa altresì per questo punto. Quindi ciascuno dei tre circoli massimi che concorrono a formare un triangolo sferico, taglia i due altri secondo delle linee rette che sono diametri della sfera.

268. Egli è evidente che due circoli massimi d' una sfera si tagliano sempre; altrimenti i loro piani coinciderebbero, e non formerebbero che un solo e medesimo circolo.

269. Un angolo sferico BAC (Fig. 158) è l' angolo che fanno tra loro i piani dei due circoli massimi, ai quali gli archi AB, AC appartengono; esso adunque non è altra cosa (191.) se non se l' angolo che sarebbe formato da due linee rette guidate nei piani di questi circoli massimi, perpendicolarmente ad un medesimo punto della loro sezione comune.

L' uso è di denotare un angolo sferico, o con una semplice lettera collocata all' intersezione A de' suoi lati *AB*, *AC*, o come abbiamo fatto, con tre lettere, delle quali quella di mezzo corrisponda all' intersezione de' suoi lati. Secondo questa denotazione, si considera un angolo sferico come l' inclinazione de' suoi lati alla loro intersezione *A*, o piuttosto come l' inclinazione di due linee rette che toccassero in *A* gli archi *AB*, *AC*. La qual considerazione è esatta; perciocchè le due tangenti di cui si tratta, sarebbero evidentemente perpendicolari al medesimo punto *A* della sezione comune dei due cerchi.

270. Si chiamano *poli* d' un circolo massimo le estremità del diametro della sfera, che è perpendicolare al piano di questo circolo massimo. Dal che si scorge che ciascun polo è distante 90.° da tutti i punti della circonferenza del circolo al quale si riferisce.

271. COROLLARIO I. Quando i poli di due circoli massimi sono distanti l' uno dall' altro 90.°, questi circoli sono perpendicolari tra loro, poichè uno passa per una linea perpendicolare all' altro. E reciprocamente, quando due circoli massimi sono perpendicolari tra loro, uno passa pei poli dell' altro.

272. COROLLARIO II. Se dall'angolo *A* (Fig. 157) d' un triangolo sferico, come polo, si descriva un arco di cerchio *EF* che incontri in *E* ed *F* gli archi *AB*, *AC*, continuati, se è necessario, quest'arco *EF* sarà la misura dell' angolo *A*; perciocchè, se dai punti *E* ed *F* si conducano al centro *O* della sfera, i raggi *EO*, *FO*, essi saranno evidentemente perpendicolari alla sezione comune AO dei due circoli, ai quali, gli archi *AB*, AC appartengono; e per conseguenza l' arco *EF*, che è la misura dell' angolo rettilineo *EOF*, sarà altresì la misura dell' angolo sferico BAC [269].

273. COROLLARIO III. Se dai punti B e D [Fig. 159]. distanti l' uno dall' altro 90.°, come poli, si descrivano due archi DF, BF, che si taglino in F ad angoli retti: ed in seguito, pei due punti medesimi B e D si facciano passare gli archi BE, DA, che si taglino in C; si avranno due triangoli sferici BAC, DEC, nei quali gli archi BC, CE sono complementi l' uno dell' altro, gli archi AC, CD sono complementi l' uno dell' altro, e gli angoli A e D sono complementi dei lati DE, BA, avendo questi angoli per misure rispettive gli archi EF, BF.

Chiamerò uno dei triangoli BAC, DEC, *triangolo complementario* per rapporto all' altro.

274. Osservazione. Rappresentandosi le differenti posizioni che possono avere fra loro tre circoli massimi, che si tagliano: si vedrà che i tre angoli d' un triangolo sferico possono essere acuti; e che due o anche tutti e tre possono essere retti o ottusi. Si vedrà altresì che ciascun lato d' un triangolo sferico è sempre minore d' una semicirconferenza.

In un triangolo sferico che ha uno o più angoli retti, il lato opposto ad un angolo retto si chiama *ipotenusa*.

275. TEOREMA I. *In ogni triangolo sferico rettangolo BAC* [*] [Fig. 160], *il raggio sta al seno dell' angolo C, come il seno dell' ipotenusa BC sta al seno del lato AB opposto all' angolo C; ed il raggio sta al coseno dell' angolo C, come la tangente dell' ipotenusa BC sta alla tangente del lato AC adiacente all' angolo C: cioè a dire, si hanno queste due proporzioni.*

I. R : sen. C : : sen. BC : sen. BA.

II. R : cos. C : : tang. BC : tang. AC.

Dal punto C, come polo, descrivete l' arco del circolo massimo EF, che incontri in E ed F gli archi CB, CA, prolungati, e che sia la misura dell' angolo C: guidate dal centro O della sfera, i raggi OE, OF, OB, OA OC; e tirate i seni EH, BI, BK degli archi EF, BA, BC: congiungete i punti I e K colla retta IK: essa sarà nello stesso tempo perpendicolare alle linee BI, OC; poichè BI è perpendicolare al piano OCA nel quale la retta IK è situata, e il piano IBK è perpendicolare ad OC, per essere BK perpendicolare ad OC. Guidate le tangenti CM, CL, degli archi CB, CA; per queste tangenti fate passare un piano MCL, che sarà evidentemente perpendicolare al piano OCF. Da un altro canto, questo piano MCL taglia, secondo ML, il piano OALMBO, che (a motivo dell' angolo retto A del triangolo sferico BAC) è perpendicolare al piano OCF; e per conseguenza ML è perpendicolare al piano OCF (183.).

Ciò posto, le rette EO, BK, MC, che sono situate in un medesimo piano, e perpendicolari al raggio OC, sono parallele; e per una ragione si-

(*) Suppongo sempre, denotando un triangolo sferico rettangolo con tre lettere, che quella di mezzo corrisponda ad un angolo retto.

mile, le rette FO, IK, LC sono parallele; dunque (195.) gli angoli EOF, BKI, MCL sono eguali; e per conseguenza i tre triangoli rettangoli OHE, KIB, CLM sono simili: donde segue che si hanno le due proporzioni OE: EH :: KB: BI, ed OE : OH :: CM: CL; le quali essendo tradotte in valori trigonometrici, si riducono a quelle che formano l' enunziato del teorema.

276. COROLLARIO I. Di quì ne segue che in un triangolo sferico qualunque ABC (Fig. 161.), i seni degli angoli stanno fra loro come i seni dei lati opposti; perciocchè, se da un angolo C si abbassi l' arco CD perpendicolare all' arco AB, si avrà (articolo precedente n.° 1) . . . .

sen. A : (*) R :: sen. CD : sen. AC

R : sen B :: sen. BC : sen CD

Dunque (Alg. 133.) sen. A : sen. B : : sen. BC : sen. AC.

277. COROLLARIO II. In due triangoli rettangoli sferici ADC, BDC che hanno un lato comune CD, i coseni degli angoli ACD, BCD, che forma questo lato collę ipotenuse, stanno fra loro in ragione inversa delle tangenti delle ipotenuse: perciocchè si ha (275. n. 2.) . . . .

cos. ACD : R :: tang. CD : tang. AC

R : cos. BCD :: tang. BC : tang. CD

Dunque (Alg. 133.) cos. ACD : cos. BCD :: tang. BC : tang. AC :

278. TEOREMA II. *In ogni triangolo sferico rettangolo, il raggio sta al coseno d' un lato come il coseno dell' altro lato al coseno dell' ipotenusa.*

Sia il triangolo rettangolo BAC (Fig. 159.). Dal

(*) Segno con una lineetta al disotto i termini che devono sparire colla divisione.

punto B, come polo, descrivete l'arco FED; i due archi FED, ACD, essendo l' uno e l' altro perpendicolari all'arco BAF, si tagliano in un punto D, che è distante 90 gradi dai punti B, A, F; ed il triangolo rettangolo DEC è (273.) il triangolo complementario del triangolo rettangolo proposto BAC. Ora nel triangolo DEC, si ha (275. n.° 1.), R: sen. D :: sen. DC : sen. EC; ma l'angolo D è complemento di BA, DC è complemento di CA, EC è complemento di BC; dunque R : cos. AB :: cos. AC : cos. CB.

279. COROLLARIO Dunque, se due triangoli rettangoli sferici ADC, BDC (Fig. 161.) hanno il lato comune CD, i coseni delle basi AD, BD, staranno fra loro come i coseni delle ipotenuse AC: BC; perciocchè . . . .

cos. AD : R :: cos. AC : cos. CD

R : cos. BD :: cos. CD : Cos. BC

Dunque (Alg. 133.) cos. AD : cos. BD : : cos. AC: Cos. BC.

280. TEOREMA III. *In ogni triangolo sferico rettangolo BAC* (Fig. 159.), *il raggio sta al seno d' uno C degli angoli C e B, come il coseno del lato CA adiacente a quest' angolo, sta al coseno dell' angolo B opposto al lato CA.*

Imperciocchè, facendo la medesima costruzione dell'articolo 278, il triangolo rettangolo complementario DEC dà (275n.° 1) R: Sen. DCE:: Sen. DC : Sen. DE. Ora l' angolo DCE è eguale al suo opposto al vertice BCA, DC è complemento di CA, DE è complemento di EF, misura dell' angolo B; dunque rapportando la proporzione al triangolo BAC, si ha R : sen. C :: cos. AC : cos. B.

281. COROLLARIO. Dunque nei due triangoli rettangoli sferici ADC, BDC (Fig. 161.), che hanno il lato comune CD, i seni degli angoli ACD,

BCD, stanno fra loro come i coseni degli angoli A e B; perciocchè . . . .

sen. ACD : R :: cos. A : cos. CD

R : sen. BCD :: cos. CD : cos. B

Dunque (Alg. 133.) sen. ACD : sen. BCD :: cos. A : cos. B.

282. TEOREMA IV. *In ogni triangolo sferico rettangolo BAC* (Fig. 159.). *il raggio sta al seno di uno AB dei lati, come la tangente dell' angolo obbliquo B, adiacente a questo lato, sta alla tangente del lato CA opposto all' angolo B.*

Imperciocchè il triangolo complementario DEC dà (275. n.° 2.) R : cos. D :: tang. DC : tang. DE; dunque, rapportando questa proporzione al triangolo BAC, si avrà R : sen. AB :: cotang. AC : cotang. B; ma (251.) cotang. AC : cotang. B :: tang. B : tang. AC; dunque, R : sen. AB :: tang. B : tang. AC.

283. COROLLARIO. Dunque i due triangoli rettangoli sferici ADC, BDC (Fig. 161), che hanno il lato comune CD, i seni delle basi AD, BD, stanno fra loro in raggione inversa delle tangenti degli angoli A e B; perciocchè . . . .

sen. AD : R :: tang. CD : tang. A

R : sen. BD :: tang. B : tang. CD

Dunque (Alg. 133) sen. AD : sen. BD :: tang. B : tang. A.

284. TEOREMA V. *In ogni triangolo rettangolo sferico BAC* (Fig. 159.), *il raggio sia al coseno dell' ipotenusa, come la tangente di uno degli angoli obbliqui sta alla cotangente dell' altro angolo.*

Imperciocchè il triangolo complementario DCE dà (282) R : sen. CE :: tang. DCE : tang. DE;

dunque, rapportando questa proporzione al triangolo BAC, si avrà R : cos. BC :: tang. C : cotang. B.

285 LEMMA. *Se si rappresentano con A e B due archi disuguali, si avranno queste proporzioni:*

I. Sen. A+sen. B: 2 sen. $\frac{A+B}{2}$ :: cos. $\frac{A-B}{2}$: R;

II. Cos. A+cos. B : 2 cos. $\frac{A+B}{2}$ :: cos. $\frac{A-B}{2}$: R;

III. Sen. A—sen. B: 2 sen. $\frac{A-B}{2}$: cos. $\frac{A+B}{2}$: R;

IV. Cos. B—cos. A: 2 sen. $\frac{A-B}{2}$ :: sen. $\frac{A+B}{2}$: R;

V. Sen.A+sen.B:Sen.A—sen.B.tang. $\frac{A+B}{2}$: tang. $\frac{A-B}{2}$

VI. Cos.A+cos.B:cos.B—cosA:: cot. $\frac{A+B}{2}$: tang. $\frac{A-B}{2}$

Siano (Fig. 162) ACLEA il quadrante descritto dal centro C : AB ed AD i due archi proposti: dividete la loro differenza DEB in due parti uguali al punto E col raggio CE, che sarà perpendicolare alla corda BD: prolungate dall' una e dall' altra parte questa corda sino all' incontro dei raggi CA, CL prolungati: conducete pel punto E la tangente KEI, che incontri in I e K i prolungamenti dei medesimi raggi: abbassate dai punti B, E, F, D le perpendicolari BN, EH, FG, DO sul raggio CA, e dai punti F, D conducete le parallele FR, DP al medesimo raggio: in fine prolungate il raggio CB sino all' incontro della tangente KI.

L' arco EB essendo la semidifferenza dei due

archi AB, AD, cioè a dire, di A e B, si ha

$EB = \frac{A-B}{2}$. Da un altro canto, per essere EB

=ED, i tre archi ADB, ADE, AD, formano una proporzione aritmetica continua; dunque . . . .

(Alg. 110.) $ADE = \frac{A+B}{2}$. Similmente, per essere BF=FD, le rette BN, FG, DO, formano una proporzione aritmetica continua, e le rette CN, CG, CO formano una proporzione aritmetica continua; dunque 2 FG=BN+DO=sen. A+sen. B; e 2 CG=CN+CO=cos. A+cos.B. Inoltre si ha BP= sen. A—sen. B; DP o ON=cos. B—cos. A; EH

$=\text{sen.}\ \frac{A+B}{2}$; $CH=\text{cos.}\ \frac{A+B}{2}$; $BF=\text{sen.}\ \frac{A-B}{2}$;

$CF=\text{cos.}\ \frac{A-C}{2}$; $EI=\text{tang.}\ \frac{A+B}{2}$; $EM=\text{tang.}$

$\frac{A-B}{2}$; $EK=\text{cotang.}\ \frac{A+B}{2}$.

I due triangoli simili CFG, CEH danno FG : EH :: CF : CE, ovvero I.° 2 FG : 2 EH :: CF : CE; e CG : CH :: CF : CE, ovvero II.° 2 CG : 2 CH :: CF : CE.

I due triangoli simili BPD, CHE danno BP : BD : CH : CE, ovvero III.° BP : 2 BF :: CH : CE; e DP : BD :: EH CE, ovvero IV.° DP : 2BF :: EH : CE.

I triangoli simili VGF, FSB, e dippiù la proprietà delle parallele, dimostrata (102.), danno FG. BS :: FV : BF :: EI EM; dunque . . . . . .

V.° 2 FG :: 2BS o BP :: EI : EM.

Finalmente i triangoli simili ZRF, BSF, e inol-

tre le parallele FZ, EK, danno FR o CG : FS :: FZ : FB :: EK ; EM ; dunque.

VI.° 2 CG : 2 FS o DP :: EK : EM

Ora queste sei proporzioni, tradotte in valori trigonometrici, si riducono a quelle che formano l' enunziato del lemma.

Queste proporzioni non ci saranno tutte utili nel seguito; ma siccome esse si dimostrano tutte colla medesima Figura, e sono d' altronde curiose, ho creduto di doverle esporre insieme.

286. TEOREMA VI. *In un triangolo sferico qualunque ABC (Fig. 161), la cotangente della semisomma degli angoli A e B, alla base, sta alla tangente della loro semidifferenza, come la tangente della metà dell' angolo del vertice C, sta alla tangente dell' angolo che forma l' arco CD perpendicolare alla base, coll' arco CE che divide in due parti eguali l' angolo C.*

Imperciocchè si ha (281) cos. B : cos. A :: sen. BCD : sen. ACD ; donde si ricava (Alg. 127) cos. B+cos. A : cos. B—cos. A :: sen. BCD+sen. ACD : sen. BCD—sen. ACD. Ora, pel lemma precedente, cotang. $\frac{A+B}{2}$: tang. $\frac{A-B}{2}$ :: cos B + cos. A : cos. B — cos. A, e sen BCD + sen. ACD ; sen. BCD—sen. ACD :: tang. $\frac{BCA}{2}$ tang. DCE.

287. TEOREMA VII. *In un triangolo sferico qualunque ABC (Fig. 163.), il prodotto dei seni de' lati AB, AC, che comprendono l' angolo A, sta al prodotto dei seni de' due eccessi della semisomma dei tre lati del triangolo, sopra ciascuno dei medesimi lati AB, AC, come il quadrato del raggio, sta al quadrato del seno della metà dell' angolo A.*

Imperciocchè, se da uno dei due angoli B o C, per esempio, dall'angolo B, si abbassi l'arco BD perpendicolare sopra il lato opposto AC, si avrà (275. n.° 2) $R : \cos. A :: \text{tang.}\ AB : \text{tang.}\ AD$; il che dà $\text{tang.}\ AD = \frac{\cos. A\ \text{tang.}\ AB}{R}$. Da un altro canto, si ha (279): $\cos. AD : \cos. DC$ o $\cos. (AC-AD) :: \cos. AB : \cos. CB$; e (252) $\cos (AC-AD) = \frac{\cos. AC \cos. AD + \text{sen.}\ AC\ \text{sen.}\ AD}{R}$; dunque.

$\cos. AD : \frac{\cos. AC \cos. AD + \text{sen.}\ AC\ \text{sen.}\ AD}{R} ::$

$\cos. AB : \cos. CB$; il che dà $\frac{R\ \text{sen.}\ AD}{\cos. AD} = \frac{R^2. \cos. CB - R. \cos AC \cos. AB}{\text{sen.}\ AC \cos. AB}$. Ma (250) $\frac{R.\ \text{sen.}\ AD}{\cos. AD} = \text{tang.}\ AD$. Eguagliando tra loro i due valori di tang. AD, si avrà $\frac{\cos. A.\ \text{tang.}\ AB}{R} = \frac{R^2. \cos. CB - R. \cos. AC \cos. AB}{\text{sen.}\ AC \cos. AB}$, ovvero (mettendo in vece di tang. AB il suo valore $\frac{R.\ \text{sen.}\ AB}{\cos. AB}$ e facendo sparire le frazioni), $\cos. A.\ \text{sen.}\ AB \times \text{sen.}\ AC = R^2. \cos. CB - R. \cos AC \cos. AB$, ossia (mettendo in vece di $\cos. A$ il suo valore $\frac{R^2 - 2\left(\text{sen.} \frac{A}{2}\right)^2}{R}$ (254), e trasponendo),

$2\left(\text{sen.}\frac{A}{2}\right)^2$ sen. AB. sen. AC $=R^2$ (cos. AC × cos. AB + sen. AC. sen. AB) — R^2. cos. CB; ma (252) cos. AC. cos. AB + sen. AC × sen. AB = R cos. (AC — AB); dunque. . . . . .

$2\left(\text{sen.}\frac{A}{2}\right)^2$. sen. AB. sen. AC $=R^2$ (cos. (AC — AB) — cos. BC); ma (285 n.° 4), R (cos. (AC—AB) —cos. BC) = ...

$$2\left(\text{sen.}\frac{BC+CB+AB}{2}\right)\times\text{sen.}\left[\frac{BC+AB-AC}{2}\right]$$

$$=2\ \text{sen.}\left[\frac{BC+AC+AB}{2}-AB\right]\times\text{sen.}\left[\frac{BC+AB}{2}+\frac{AC}{2}-AC\right]$$; dunque finalmente sen. AB × sen. AC ×

$$\left[\text{sen.}\frac{A}{2}\right]^2=R^2\left[\text{sen.}\frac{BC+AC+AB-AB}{2}\right]\times\left[\text{sen.}\frac{BC+AB+AC}{2}-AC\right]$$: equazione da cui risulta la proporzione che forma l'enunziato del Teorema.

288. COROLLARIO. La proposizione precedente ha sempre luogo, qualunque siano le lunghezze dei lati del triangolo sferico; essa adunque si applica eziandio al caso in cui questi lati diventassero infinitamente piccoli. Ora in questa ipotesi, il triangolo può essere considerato come rettilineo; ciascun lato può essere preso per suo seno; l'eccesso della semisomma dei tre lati sopra un lato, può essere preso pel seno di questo medesimo eccesso. Quindi, applicando la proposizione precedente ai triangoli rettilinei, e considerando che le

proprietà d'un triangolo rettilineo, che ha i lati infinitamente piccoli, sono le medesime per un triangolo rettilineo simile, i cui lati sono finiti: concluderemo in generale, che *in ogni triangolo rettilineo, il prodotto di due lati che comprendono un angolo, sta al prodotto dei due eccessi della semisomma dei tre lati sopra ciascuno dei due lati proposti, come il quadrato del raggio al quadrato del seno della metà dell'angolo che essi comprendono.*

Di qui risulta un nuovo mezzo di trovare qualsivoglia angolo d'un triangolo rettilineo, di cui si conoscono i tre lati.

Tav. I. *Risol. d'un triang. sferico BAC* (Fig. 164.).

casi	dati	trovare	soluzione
1	L'ipotenusa BC, e l'angolo B	il lato opposto AC	R : sen. B : : sen. BC : sen. AC (275).
2	Medesimi dati del caso precedente	Il lato adiacente BA	R : cos. B : : tan. BC : tang. BA (275).
3	Medesimi dati	L'altro angolo C	R : cos. BC : : tang. B. cotang. C (284).
4	L'ipotenusa BC, ed il lato BA	L'altro lato AC	Cos. BA : cos. BC : : R : cos. AC [278].
5	Medesimi dati del caso precedente	L'angolo opposto C	Sen. BC : sen. AB : : R : sen. C [275].
6	Medesimi dati	L'ang. adiacente B	Tang. BC : : tang BA : R : cos. B (275).
7	Un lato BA, e l'angolo adiacente B	L'altro lato AC	R : sen. BA : : tang. B : tang. AC (282).

8	Medesimi dati del caso precedente	L'angolo opposto C	R: sen.B : : cos. BA : cos. C [280]
9	Medesimi dati	L'ipotenusa BC	Cos. B : R : : tang. AB : tang.BC [275].
10	Un lato BA, e l'angolo opposto C	L'altro lato AC	Tang.C : tang. BA : : R : sen. AC [228].
11	Medesimi dati del caso precedente	L'ang. adiacente B	Cos. BA : cos. C : : R. sen.B [280].
12	Medesimi dati	L'ipotenusa BC	Sen. C : sen. BA : : R : sen. BC [275].
13	I due lati BA, AC	L'ipotenusa BC	R : cos. BA : : cos. AC : cos. BC[278]
14	Medesimi dati del caso precedente	Un angolo, come B	Sen. BA : R : : tang. AC : tang.B [282]
15	I due angoli B e C	Un lato, come BA	Sen. B : cos. C : : R : cos. BA [280].
16	Medesimi dati del caso precedente	L'ipotenusa BC	Tang. B cotang.C : : R : cos. BC [284]

casi	dati	trovare	soluzione
1	Due lati CA, CB, e l' angolo A opposto ad uno di essi	L' angolo B opposto all' altro lato	Sen. CB : sen. CA:: sen. A: sen. B (276).
2	Medesimi dati del caso precedente	L' angolo compreso ACB	Abbassate (Fig. 161) l' arco CD perpendicolare sopra AB, prolungato, se bisogna; allora (284) avrete la proporzione, R:cos.AC::tang. A : cotang. ACD : il che dà l' angolo ACD. In seguito (277) tang. CB: tang. CA :: cos. ACD: cos. BCD il che dà l' angolo BCD, dunque l' angolo ACB (somma o differenza degli angoli ACD, BCD) sarà noto.
3	Medesimi dati	Il terzo lato AC	R: cos. A:: tang. AC: tang. AD (275); cos. AC : cos. BC :: cos. AD : cos. BD (279).
4	Due lati AB, AC, e l' angolo compreso A	L' altro lato BC	R: cos. A :: tang. AC: tang. AD (275); il che dà AD In seguito(279), cos. AD: cos. BD:: cos. AC : cos. BC.
5	Medesimi dati	Uno degli altri due angoli, per esempio B.	R: cos. A :: tang. AC : tang. AD (275) :: sen. BD : sen. AD :: tang. A : tang. B (283).

6	Due angoli A e C ed il lato adiacente AC	L' altro angolo B.	R: cos. AC:: tang. A: cotang. ACD (284); il che dà l'angolo BCD. In seguito (281) sen. ACD: sen. BCD::cos. A: cos. B.
7	Medesimi dati del caso precedente	Uno degli altri due lati, per esempio BC	R: cos. AC:: tang. A: cotang. ACD(284); cos. BCD:cos. ACD:: tang. AC : tang. BC (277).
8	I due angoli A e B ed il lato AC opposto ad uno di essi	Il lato BC opposto all' altro	Sen. B : sen. A::sen. AC : sen. BC (276.).
9	Medesimi dati del caso precedente	Il lato adiacente AB	R: cos. A :: tang. AC: tang. AD (275); tang. B : tang. A :: sen. AD: sen. BD (283).
10	Medesimi dati	L' altro angolo C	R:cos. AC:tang. A : cotang. ACD (284); cos. A : cos. B :: sen. ACD: sen. BCD (281).
11	I tre angoli A, B, C,	Un lato, per esempio, AC	Cot. $\frac{A+B}{2}$:tang. $\frac{A-B}{2}$:: tang. $\frac{C}{2}$: tang. DCE (286. Fig. 161); il che dà l'angolo ACD. In seguito (284), tang. A:cotang. ACD::R:cos. AC.
12	I tre lati AB, AC, BC	Un angolo, per esempio, A	Sen. AB$\times$sen. AC:sen. $\left(\frac{AB+AC+BC}{2}-AB\right)$ $\times$ sen. . . . . . $\left(\frac{AB+AC+BC}{2}-AC\right)$ ::R²: $\left(\text{sen.}\frac{A}{2}\right)^2$ (287).

Osservazioni sopra le due Tavole precedenti.

La cosa incognita, cioè a dire, l'angolo o il lato che si cerca, e che forma il quarto termine di ciascuna analogia, può qualche volta equivalere indifferentemente ad un angolo acuto o al suo supplemento; il che dà allora due soluzioni. Per vedere, in generale, ciò che può essere la cosa incognita, bisogna richiamarsi alla memoria che denominando x un arco qualunque, minore di $90°$, e per conseguenza $180°-x$ il suo supplemento: si ha (248) sen. $(180°-x)$ = sen. x; cos. $(180°-x)$ = $-$cos. x; tang. $(180°-x)$ = $-$ tang. x; cotang. $(180°-x)$ = $-$cotang. x. Cosicchè un angolo acuto ed il suo supplemento hanno lo stesso seno, tanto per la quantità come pel segno; e hanno il medesimo coseno, la medesima tangente, e la medesima cotangente, solamente per la quantità e non pel segno. Con questi principj, si vede, per esempio, che conoscendo (Tav. I. cas. 12). sen. C e sen. BA, il quarto termine sen. BC della proporzione, potrà appartenere o ad un angolo acuto o al suo supplemento; medesimamente (Tav. II. cas. 1.), il quarto termine della proporzione può appartenere ad un angolo acuto o al suo supplemento; se (Tav. I. cas. 7.) l'angolo B è minore di $90°$, il lato AC sarà minore di $90°$: e se B vale più di $90°$, il lato AC verrà più di $90°$: ec.

APPLICAZIONE DELL' ALGEBRA ALLA GEOMETRIA

CAPO I.

Principj generali: applicazioni agli esempj.

289. Le quantità che fanno l'oggetto della Geometria, cioè a dire, le linee, le superficie ed i solidi, hanno tra loro dei rapporti che possono essere espressi per mezzo di equazioni, secondo le regole che l'Algebra prescrive pel calcolo delle grandezze in generale. Nell' arte di formare queste equazioni, consiste l'applicazione dell' Algebra o dell' Analisi alla Geometria.

290. Qualunque sia la specie d'un problema, bisogna, per risolverlo, esaminare attentamente le sue condizioni: esprimere queste condizioni per mezzo di equazioni, senza distinguere le quantità incognite, da quelle che sono date: e ricavare dall' equazione finale il valore dell' incognita di cui si ha bisogno. Le quantità che entrano nei problemi di Geometria, hanno, le une per rapporto alle altre, delle proprietà primitive, che sono cognite o dalla natura della grandezza in generale, o dagli Elementi della Geometria, e che servono a legare insieme, per mezzo di equazioni, le proprietà caratteristiche ed individuali della questione che si vuol

risolvere. Ecco alcune di queste proprietà generali, di cui faremo un uso frequente.

291. *Un tutto è uguale alla somma di tutte le sue parti.* Quindi, allorchè in un tutto, composto d'un certo numero di parti, si avrà l'espressione algebrica di questo tutto, e delle sue parti, all'eccezione di una; si avrà altresì l'espressione di questa, sottraendo dal valore del tutto la somma dei valori delle parti, di cui si hanno le espressioni particolari.

In ogni proporzione geometrica, il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj. Quindi, allorchè si hanno le espressioni di tre termini, si ha eziandio quella dell'estremo incognito o del medio incognito, con dividere il prodotto dei medj per l'estremo cognito, o il prodotto degli estremi pel medio cognito.

Nei triangoli simili, i lati omologhi sono proporzionali. La similitudine di due triangoli si riconosce principalmente dall'eguaglianza degli angoli. Quindi i nostri Lettori devono avere ben presenti alla mente le proposizioni che abbiamo dimostrate concernenti la similitudine dei triangoli, nel Trattato precedente.

Nel triangolo rettangolo, il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati.

La superficie d'un triangolo qualunque è uguale alla metà del prodotto della sua base per la sua altezza.

In ogni triangolo rettilineo, i lati stanno fra loro come i seni degli angoli opposti.

Questi Teoremi generali ed altri simili, sono la base delle equazioni che contengono la relazione degli elementi d'un Problema geometrico; e queste equazioni diventano esse stesse la sorgente di molti altri Teoremi che dà il calcolo solo, perchè

non si tratta più allora che di operare sopra quantità puramente algebriche.

292. Sovente, per poter far uso dei Teoremi generali che ho indicati, siamo obbligati di combinare le quantità date dalle condizioni d'un Problema, con altre che ne dipendono, e che punto non esistono nella Figura che ci siamo fatta per rappresentare le prime. Allora bisogna tirare nella Figura nuove linee che si colleghino, per mezzo di rapporti cogniti, con quelle che vi sono già tirate. Talora si prolungheranno certe linee, o indefinitamente, o finchè ne incontrino altre, o finchè diventino d'una lunghezza data; talora si condurranno da qualche punto notabile delle linee parallele o perpendicolari ad altre linee; talora si congiungeranno dei punti rimarchevoli; qualche volta si costruirà una nuova Figura, per poter combinare insieme più comodamente gli elementi della questione, col mezzo di certi Teoremi che si credono i più opportuni a questo uso.

Quindi, se due linee che non s'incontrano, fanno degli angoli dati con una terza linea, si possono prolungare finchè esse formino un triangolo i cui angoli, e per conseguenza i rapporti dei lati siano dati.

Se un angolo è dato, ovvero è uguale a qualche altro angolo, si può formare un triangolo dato di specie, o simile ad un altro triangolo.

Se si ha un triangolo acutangolo o ottusangolo, si possono formare due triangoli rettangoli, coll'abbassare da uno degli angoli una perpendicolare sul lato opposto, o sul suo prolungamento.

Se si tratta di Figure che abbiano più di tre lati, si possono risolvere in triangoli, col condurvi delle diagonali.

Così di molte altre costruzioni.

293. Allorchè si sarà scelto l'ordine ed il meto-

do, con cui si giudica di dovere dare, nel modo più semplice, la soluzione d' un Problema, e che si sarà in conseguenza descritta la Figura che deve somministrare gli elementi del calcolo; si daranno dei nomi alle diverse linee che questa Figura contiene. In seguito si combineranno le quantità cognite con quelle che non lo sono, e si procurerà di formare delle equazioni, sia col paragonare insieme due differenti valori d' una medesima incognita che ha un nome particolare, sia col cercare due valori d' una medesima quantità che non ha nome, ma che deriva da quelle che lo hanno.

294. Vi vuole sovente dell' artifizio a denominare convenevolmente le quantità che devono essere combinate insieme nel modo esposto. Ciò si apprenderà meglio nel seguito cogli esempj, di quel che potrei farlo qui comprendere coi precetti. Quanto al presente, mi contenterò di osservare, che non è necessario di dare dei nomi alle quantità, il di cui valore può dedursi da quelle che si sono già denominate. Avendo, per esempio, denominata una linea che suppongo divisa in due parti, ed una delle sue parti, non v' è bisogno d' una nuova lettera per denotare l' altra parte, poichè essa si trova con una semplice sottrazione: medesimamente, avendo denominato i due lati d' un triangolo rettangolo, l' ipotenusa avrà tutto di seguito un nome; poichè essa è uguale alla radice quadrata della somma de' quadrati dei due lati ec. Ma qualche volta, per facilitare e semplificare il calcolo, si rappresenta con una lettera particolare, una quantità che si può dedurre immediatamente dalle altre, e non si elimina questa lettera, se non dopo aver formate tutte le equazioni che esprimono le condizioni del problema.

295. I problemi di Geometria sono come quelli

di Algebra pura. Se nell'equazione finale si trova una sola incognita, il problema è determinato; ed è del primo grado, del secondo grado, del terzo, ec., secondo che l'equazione finale è del primo grado o del secondo o del terzo o ec. Se l'equazione finale contiene più di un'incognita, il problema è indeterminato, ed è del medesimo grado di questa equazione.

296. Quando si è giunto all'equazione finale d'un problema, si cerca nella Figura già costruita, o in una nuova Figura che si costruisce espressamente per questo uso, l'espressione geometrica dell'incognita o delle incognite. Questa operazione si chiama la *costruzione dell'equazione*. Le equazioni determinate del primo e del secondo grado si costruiscono per mezzo di principj tratti dagli elementi di Geometria, come si vedrà più sotto. Le equazioni determinate, dei gradi superiori al secondo, e le equazioni indeterminate, dipendono per la loro costruzione, dalla teoria delle linee curve. Passo agli esempj.

297. PROBLEMA I. *Trovare* (*Fig.* 141) *per mezzo del raggio* CA *della sfera*, *e della saetta* Ap, *l'espressione d'un segmento sferico generato dalla rivoluzione del semisegmento circolare* Ap, o *intorno al raggio* CA.

Abbiamo veduto (237) che il solido cercato ha per valore $\frac{AC\times cerc.Af}{3} - \frac{Cp\times cerc.fp}{3}$ . . . . .

Resta a tradursi questo valore, per modo che non vi entrino che il raggio CA, e la saetta Ap. Chiamiamo a il raggio CA, o $2a$ il diametro AB; x la saetta Ap, e per conseguenza $a-x$ la parte Cp del raggio; $2a-x$, la parte pB del diametro; π il rapporto della circonferenza del circolo al suo diametro; S, il segmento sferico. Si

ha [177] cerc. $Af=\pi\times(Af)^2$, cerc. $fp=\pi\times(fp)^2$; ma (166) $(Af)^2=AB\times Ap=2ax$; e (131) $(fp)^2=Ap\times pB=x(2a-x)=2ax-xx$; dunque cerc. $Af=\pi(2ax)$, cerc. $fp=\pi(2ax-xx)$. Sostituendo, per AC, cerc. Af, Cp, cerc. fp, i loro valori algebrici nell'espressione generale di S, si avrà S= . . . .
$\frac{\pi(2a^2x)}{3}-\frac{\pi(2ax-xx)(a-x)}{3}$; donde si ricava (effettuando le moltipliche, e riducendo) S= . .
$\frac{\pi(3ax^2-x^3)}{3}=\pi x^2\times\left(a-\frac{x}{3}\right)$ . . . . . .

Ora, πx^2 è l'espressione di un circolo che ha Ap per raggio, ed $a-\frac{x}{3}$ è il raggio meno il terzo della saetta; donde si vede che *il segmento sferico è uguale ad un cilindro che ha per raggio della sua base la saetta Ap, e per altezza, l'eccesso del raggio della sfera sopra il terzo della saetta.*

298. PROBLEMA II. *Iscrivere un quadrato in un dato triangolo* ABC (Fig. 166).

Immaginiamoci che DEKF sia il quadrato cercato. Dal vertice A abbassiamo sulla base BC, la perpendicolare AH, che incontri in qualche punto M, il lato DF di questo quadrato.

Supponiamo { BC . . . . $=a$, AH . . . . $=b$, AM . . . . $=x$,

e per conseguenza MH o DE o FK$=b-x$.

Le due prime linee BC, AH sono note, poichè tutte le dimensioni del triagolo ABC sono date; ma le altre linee AM, DE, o MH, o FK sono incognite.

Le rette BC, DF essendo parallele, si ha (100)

BC : DF : : AB : AD : : AH : AM, cioè a dire (paragonando solamente il primo rapporto col terzo, e mettendo per BC, AH, AM, i loro valori algebrici) q : DF : : b : x ; e per conseguenza DF $= \frac{ax}{b}$. Ora secondo le condizioni del problema, si deve avere DF=DE. Quindi si avrà l' equazione $\frac{ax}{b} = b - x$; d' onde si ricava $x = \frac{bb}{a+b}$.

Per costruire questo valore, descrivo (Fig. 167) dal punto A, come centro, col raggio AO eguale ad AH+BC, un arco di cerchio che seghi la base CB prolungata, nel punto O : dal punto H abbasso HR perpendicolare ad AO. In seguito, avendo preso AM=AR, guido, pel punto M, la retta DF parallela a BC : e pei punti D ed F, le perpendicolari DE, FK, a BC. Allora DEKF è il quadrato richiesto. Difatti si ha (165) (AO)^2 : (AH)^2 : : AO : AR $= \frac{(AH)^2}{AO} = \frac{bb}{a+b}$; che è il valore di x. Dunque il punto M, determinato dalla costruzione precedente, è quello per cui deve passare il lato FD del quadrato cercato ; il che basta per compiere la costruzione di questo quadrato.

299. PROBLEMA III. *Due circoli X ed Y* (Fig. 168 e 169) *essendo dati di grandezza e di posizione sopra un piano, guidare una linea MN che li tocchi entrambi.*

Supponiamo che la tangente MN, prolungata, se è necessario, incontri in S la retta CO che congiunge i centri dei due circoli proposti. Avendo condotti i raggi CM, ON ai punti di contatto M ed N, ed avendo abbassata la perpendicolare MA sopra la linea dei centri, prendiamo.

quantità cognite $\begin{cases} CO \ldots\ldots\ldots = a, \\ CM \ldots\ldots\ldots = b, \\ ON \ldots\ldots\ldots = c, \end{cases}$

l'incognita . . . . CA . . . . $= x$,

Ciò posto, i triangoli rettangoli simili CAM, ONS danno le due proporzioni . . . .

$$CA\ [x] : CM\ [b] :: CM\ [b] : CS = \frac{bb}{x}.$$

$$CA\ [x] : CM\ [b] :: ON\ [c] : OS = \frac{bc}{x}.$$

Ora [Fig. 168] si ha CS=CO+OS; e (Fig. 169) CO=CS+OS, ossia CS=CO—OS. Dunque comprendendo i due casi in una medesima equazione col mezzo del doppio segno ±, si avrà . . . $\frac{bb}{x} = a \pm \frac{bc}{x}$; d'onde si ricava $x = \frac{b.(b \mp c)}{a}$.

Questo valore di x si costruisce, col cercare (166) una quarta proporzionale alle tre linee rappresentate da a, b e $(b \mp c)$; poichè questa quarta proporzionale avrà per espressione $\frac{b(b \mp c)}{a}$, e sarà per conseguenza l'incognita x. Conoscendo così la posizione del punto A: se da questo punto si innalzi, perpendicolarmente a CO, la retta AM, ed in seguito avendo condotto il raggio CM, si alzi sopra di esso, al punto M, una perpendicolare: questa perpendicolare toccherà i due circoli.

500. PROBLEMA IV. *I due semicircoli ABD, OPD* [Fig. 170] *essendo supposti toccarsi in D, ed essendo l'ordinata OB perpendicolare all'estremità O del diametro DO del semicircolo interno: descrivere un circolo KPH che tocchi i tre lati BO, OPD, DHB del triangolo mistilineo BOPDHB.*

Siano i tre punti C, F, G, i centri dei due semicircoli dati ABD, OPD, e del circolo cercato KPH. I punti C, G, ed il punto H di contatto della circonferenza KPH colla semicirconferenza ABD, sono situati [95] sulla stessa linea retta CGH; similmente, i punti F, G ed il punto P di contatto della circonferenza KPH colla semicirconferenza OPD, sono situati sopra la stessa linea retta FPG. Dal centro G, al punto di contatto K della circonferenza KPH coll' ordinata BO, guidate il raggio GK, che sarà necessariamente perpendicolare ad OB (91); abbassate altresì dallo stesso punto G la perpendicolare GE sopra OD. Ciò posto, chiamiamo.

quantità cognite . . . . { CD . . . . a, FO o FD . . . . b,

incognite . . { FG . . . . x, FE . . . . y,

Egli è chiaro primieramente che si avrà $CF = a-b$, EO o GK o GP o GH $=b-y$, $CE=a-b-y$, $CG=CH-GH=a-b+y$, $(EG)^2=xx-yy$.

Il triangolo rettangolo CEG dà $(CG)^2=(CE)^2+(EG)^2$, cioè a dire, in termini analitici $(a-b+y)^2=(a-b-y)^2+xx-yy$: equazione che si riduce ad (A) $4ay-4by+yy=xx$.

Inoltre, si ha $FG=FP+PG$, cioè a dire [B] $x=2b-y$, ed $xx=4bb-4by+yy$.

Mettiamo questo valore di xx nell' equazione (A); troveremo $y=\frac{bb}{a}$. In seguito mettiamo questo valore di y nell' equazione [B], ed avremo $x=2b-\frac{bb}{a}$.

Egli è chiaro che il valore generico di y è una

terza proporzionale alle due linee rappresentate da a e b, cioè a dire, ai due raggi CD, FD: la quale si trova (107); e che il valore geometrico di x è ciò che rimane del diametro OD, dopo averne sottratta la terza proporzionale di cui abbiamo parlato. Conoscendo adunque così FE ed FG, non si tratterà più, per determinare la posizione del centro G, se non se di alzare, dal punto E, una perpendicolare indefinita EG sopra OD, e di descrivere dal centro F, con un raggio eguale al valore trovato per FG ossia x, un arco di circolo: quest' arco taglierà la retta EG nel punto cercato G. Finalmente si abbasserà dal punto G la perpendicolare GK sopra OB, e si descriverà col raggio GK il circolo KPH, che adempie alle condizioni del problema.

301. PROBLEMA V. *Tagliare una linea AB* (Fig. 171) *in media ed estrema ragione*, cioè a dire, *in modo che una delle parti della linea sia media proporzionale fra la linea intera e l' altra parte.*

Supponiamo che AC rappresenti la parte che deve essere media proporzionale fra la linea intera e l' altra parte; e chiamiamo AB, a; AC, x. Avremo CB$=a-x$. Ora, poichè, si deve avere AB:[a] AC [x] :: AC [x]: CB [$a-x$], si avrà l'equazione $aa-ax=xx$, d'onde si ricava $x=-\frac{a}{2}$ $\pm\sqrt{\left(aa+\frac{aa}{4}\right)}$. Quindi l'incognita ha due valori che si tratta di costruire.

Per avere il primo, all'estremità B della retta AB, innalzo la perpendicolare BD$=\frac{\text{AB}}{2}=\frac{a}{2}$, e tiro l'ipotenusa AD, il cui valore è . . . . .

$\sqrt{\left(aa+\frac{aa}{4}\right)}$. Dunque, sottraendo da DA la parte DM $=\frac{a}{2}$ il residuo AM sarà il valore cercato, poichè AM = AD — DM

$=\sqrt{\left(aa+\frac{aa}{4}\right)}-\frac{a}{2}$. Portando adunque AM da A in C, la linea AB sarà divisa in media ed estrema ragione al punto C.

Il secondo valore di x, cioè a dire

$-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(aa+\frac{aa}{4}\right)}$, si costruisce; osservando

che, se prendasi DK=DB $=\frac{a}{2}$, si avrà

AK=AD+DK$=\sqrt{\left(aa+\frac{aa}{4}\right)}+\frac{a}{2}$: quantità positiva e contraria a quella che cerchiamo. Ora, siccome le quantità negative devono sempre essere prese in sensi contrarj delle quantità positive, ne segue che prolungando KA verso M', in modo che AM'=AK, e sopra BA, prolungata verso C' prendendo AM'=AC', il punto C' sarà quello che si cerca: cosicchè si avrà la proporzione AB: AC': : CA': C'B. Difatti, se si prendano le grandezze assolute delle linee AB, AC', C'B, fatta astrazione dalla loro posizione, che non entra per nulla nei loro rapporti, si ha AB$=a$, AC'$=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(aa+\frac{aa}{4}\right)}$,

C'B$=a+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(aa+\frac{aa}{4}\right)}$; e per conseguenza AB×C'B=[AC']^2, come ognuno può convincersene, mettendo in vece delle linee i loro valori analitici, ed effettuando le moltipliche indicate.

302. Osservazione. A propriamente parlare, il solo punto A risolve il problema proposto. Ma l'Algebra dà col medesimo calcolo, non solo la soluzione della questione particolare che le si domanda, ma in generale la soluzione di tutte le questioni della medesima natura. Così, nel caso presente, l'equazione $aa-ax=xx$ risolve il problema generale in cui si trattasse di trovare sopra una linea, o sopra il suo prolungamento, un punto, la cui distanza da una delle estremità della linea data, fosse media proporzionale fra questa linea e e la distanza del punto in questione, dall'altra estremità della linea data; problema di cui quello che è stato proposto, non è che un caso particolare; poichè ivi si suppone che il punto cercato è situato sulla linea medesima.

303. PROBLEMA VI. *Conoscendo* (Fig. 172) *l'ipotenusa BC e la somma AB+AC+AD dei due lati AB, AC e dell'altezza AD d'un triangolo rettangolo: determinare questo triangolo, cioè a dire, i suoi lati ed i suoi angoli incogniti.*

Supponiamo
$$\begin{cases} BC \ldots\ldots\ldots\ldots = a, \\ AB + AC + AD \ldots\ldots = b, \\ AD \ldots\ldots\ldots\ldots = x, \\ AB \ldots\ldots\ldots\ldots = y, \\ \text{e per conseguenza } AC = b-x-y. \end{cases}$$

Il triangolo rettangolo BAC dà $[BC]^2 = [AB]^2 + [AC]^2$, cioè a dire, in termini algebrici, $aa = yy + (b-x-y)^2$; ovvero [A] $aa = 2yy + bb - 2bx + xx - 2by + 2xy$.

Inoltre, a motivo dei triangoli rettangoli simili BAC, ADC, si ha BC (a) : BA (y) :: AC $(b-x-y)$: AD (x). Donde si ricava $ax = by - xy - yy$, ovvero (moltiplicando tutto per 2) (B) $2ax = 2by - 2xy - 2yy$.

Sommando le due equazioni (A) e (B), e cancellando i termini che si distruggono, si avrà $aa+2ax=bb-2bx+xx$: donde si ricava $x=a+b\pm\sqrt{}$ [$2aa+2ab$).

Dei due valori di x, soltanto il secondo, cioè a dire, $x=a+b-\sqrt{}$ ($2aa+2ab$), può soddisfare al problema proposto; poichè egli è evidente che l'altezza AD del triangolo BAC deve essere minore di $a+b$. E per avere questo valore, non si tratta che di sottrarre dalla somma $a+b$, una media proporzionale fra $2a$ ed $a+b$. In seguito, avendo descritto sopra BC, come diametro, un semicircolo, ed avendo alzata dal punto B la perpendicolare BN eguale al valore che si è trovato per x, si condurrà, parallelamente a BC, la retta NA che incontri la semicirconferenza nel punto A, dal quale si tireranno le corde AB, AC; il che determinerà il triangolo cercato BAC.

304. Osservazione. Il problema proposto non è che un caso particolare della seguente questione generale: *Date le due linee* BC (a), BM (b) (Fig. 173.): *trovare una linea* x, *tale che la differenza dei quadrati delle due linee* b *ed* a *sia eguale alla differenza che vi è fra il prodotto della loro somma nel doppio dell'incognita, ed il quadrato di questa incognita*; perciocchè la traduzione algebrica di questo enunziato è l'equazione $bb-aa=(a+b)\times 2x-xx$, donde si ricava il medesimo risultato di sopra, $x=a+b\pm\sqrt{(2aa+2ab)}$.

Ora, vi sono sulla linea BM due punti N' ed N, che soddisfano a questa equazione. Imperciocchè supponiamo, per esempio, BC=2 piedi, BM 7 piedi; avremo, prendendo il segno superiore del radicale, BN'=15 piedi; e prendendo il segno inferiore, BN=3 piedi. Questi due valori soddisfano egualmente all'equazione proposta; poichè si ha $49-4=(7+2)\times 30-225$, e $49-4=(7+2)\times 6-9$.

Ma di questi due valori, solamente il secondo BN può risolvere il problema precedente: poichè secondo le condizioni di questo problema, le linee date devono avere, nello spazio, una disposizione particolare, e tale che ne risulti un triangolo rettangolo (Fig. 172.), la cui altezza BN o AD è necessariamente minore dell' ipotenusa BC, e molto più della quantità BC+BM (Fig. 173.).

Di qui si scorge, che quando si è giunto all' equazione finale d' un problema; bisogna esaminare, secondo la natura di questo problema, le radici che servono a risolverlo, e riguardare le altre come inutili, almeno per rapporto all' oggetto proposto. Qualche volta un problema ha più soluzioni, e qualche volta non ne ha che una sola. Ciò si conosce dall' analisi delle sue condizioni.

305. PROBLEMA VII. *Condurre dall' angolo A* (Fig. 174.) *d'un quadrato* ABCD, *una retta A F, tale, che prolungando il lato* DC, *la parte* EF *sia eguale ad una linea data* b.

Immaginiamoci che dal punto F, si guidi perpendicolarmente ad AF, la retta FM che incontri in M il prolungamento di AB; e la retta FO perpendicolare ad AM. Chiamiamo a uno dei lati del quadrato dato ABCD, e le incognite BM, x, FM, y.

Ciò posto, i due triangoli rettangoli FOM, ABE avendo tutti gli angoli eguali ciascuno a ciascuno, ed i lati FO, AB eguali, sono perfettamente eguali. Dunque AE=FM=y; e per conseguenza AF=AE+EF=$y+b$. E siccome il triangolo rettangolo AFM dà $(AM)^2=(AF)^2+(FM)^2$, si avrà $(a+x)^2=(y+b)^2+yy$, ovvero (A) $aa+2ax+xx=2yy+2by+bb$.

Inoltre, i triangoli rettangoli simili ABE, AFM danno AB (a) : AE (y) : : AF ($y+b$) : AM ($a+x$), e per conseguenza $aa+ax=yy+by$, ovvero (moltiplicando tutto per 2) (B) $2aa+2ax=2yy\times 2by$.

Sottraendo l'equazione (B) dall' equazione (A), si avrà $xx-aa=bb$, ossia $xx=aa+bb$: il che dà $x=\pm\sqrt{(aa+bb)}$, e la costruzione è la seguente.

Prendete una linea BM (Fig. 175.) eguale all'ipotenusa d'un triangolo rettangolo che abbia per lati contigui all'angolo retto, le linee date a e b. Sopra AM, come diametro, descrivete un semicircolo AHM, che taglierà la retta DC nei punti F, F', che soddisfano l'uno e l'altro al problema; di modo che, guidando le rette AEF, AF'E', si ha EF, o E'F'$=b$. Queste due linee EF, E'F' corrispondono alla radice positiva $x=+\sqrt{(aa+bb)}$. Imperciocchè, secondo la soluzione precedente, la retta AM, che ha per valore $AB+x$, ovvero $a+\sqrt{(aa+bb)}$, deve essere l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo che ha il vertice dell'angolo retto, situato sulla retta DCF; onde ne segue che questo vertice è l'uno o l'altro dei due punti d'intersezione di DCF colla semicirconferenza AHM. Quindi ciascuno dei due triangoli rettangoli AFM, AF'M, perfettamente uguali, soddisfa a questa condizione; e ciascuna delle due linee EF, E'F' è necessariamente uguale a b.

Se si vuole avere la costruzione che si riferisca alla radice negativa $x=-\sqrt{(aa+bb)}$, si prenderà, alla sinistra di B, la retta BM'=BM; sopra AM' come diametro, si descriverà un semicircolo AH'M'; si prolungherà CD verso Z; pei punti d'intersezione f, f', di questa linea colla semicirconferenza AH'M', e pel punto A, si condurranno le rette fAe, f'Ae, terminate dal prolungamento di CB: queste linee corrisponderanno alla radice negativa $x=-\sqrt{(aa+bb)}$. Imperciocchè, se in vece di supporre nella soluzione precedente, che la retta data b, la quale deve sempre passare pel punto A, e terminare alle rette E'e, FZ, cada nell'angolo BAD, si suppone che cada fuori di quest'

angolo, e che essa sia fAe ovvero $f'Ae'$: allora prendendo BM' per incognita, ed immaginando che dal punto M' si sia condotta $M'f$ o $M'f'$ perpendicolari ad $f'Ae$ o fAe', si vede che AM', la quale ha per valore $BM'-AB$, o $BM-AB$, o $\sqrt{(aa+bb)}-a$, deve essere l' ipotenusa d' un triangolo rettangolo che ha il vertice dell' angolo retto situato sulla retta CDZ. Quindi questo vertice è l' uno o l' altro punto f o f', intersezione della retta CDZ colla semicirconferenza $AH'M'$ e ciascuna delle linee fAe, $f'Ae'$ è ancora uguale ab.

306. Osservazione. Si vede che, in generale, il problema ha quattro soluzioni. Difatti, ai due valori di x corrispondono quattro valori di y; vale a dire, AE, AE', Ae, $A'e$. Imperciocchè, siccome abbiamo trovato $aa+ax=yy+by$, si avrà, mettendo successivamente in vece di x i suoi due valori, e liberando y,

$$y=-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{bb}{4}+aa+a\sqrt{(aa+bb)}\right)},$$

$$y=-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{bb}{4}+aa+a\sqrt{(aa+bb)}\right)},$$

$$y=-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{bb}{4}+aa-a\sqrt{(aa+bb)}\right)},$$

$$y=-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{bb}{4}+aa-a\sqrt{(aa+bb)}\right)},$$

I due primi valori di y sono sempre reali. Ma gli altri due possono essere immaginarj, e lo sono sempre nel medesimo tempo. Ciò avviene allorchè la quantità $\frac{bb}{4}+aa$ è minore della quantità

$a\sqrt{(aa+bb)}$, ossia allorchè si ha $bb<8aa$. Allora il semicircolo AHM cade tutto intero sotto a CZ, ed i punti d' intersezione f ed f' di CZ colla semicirconferenza AH'M', diventano immaginarj; perciocchè, siccome si ha $bb<8aa$, egli è chiaro che il raggio TH', che ha per valore $\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{2}$, è minore di a.

Se si avesse $\frac{bb}{4}+aa=a\sqrt{(aa+bb)}$, i due ultimi valori di y sarebbero uguali, ed i due punti f ed f' verrebbero a confondersi in un solo e medesimo punto H', ove la retta CZ toccherebbe la semicirconferenza AH'M'.

307. PROBLEMA VIII. *Determinare tutte le dimensioni d' un triangolo* ABC (Fig. 176.), *supponendo che si conosca la sua altezza* BD, *ed i raggi* OA, VH, *di due circoli, uno de' quali gli è circoscritto, e l' altro gli è iscritto.*

Dal centro V del circolo iscritto, conduco ai punti di contatto di questo circolo coi lati AC, AB, BC del triangolo, i raggi VR, VM, VH, i quali sono perpendicolari a questi lati; pel medesimo punto V, e pel vertice B del triangolo, guido la retta BVZ, che incontri in Z la circonferenza del circolo circoscritto: per fine tiro il raggio OZ, e la corda CZ.

Denominiamo	l' altezza BD	a,
	il raggio VR del circolo iscritto . .	b,
	il raggio OZ del circolo circoscritto	c,
	la base AC del triangolo	x,
	BH	y,

Si avrà primieramente $\frac{ax}{2}$ per valore dell' area del triangolo ABC.

Da un altro canto, questa stessa area che è la somma dei tre triangoli BVA, AVC, CVB, i quali hanno delle altezze uguali, VM, VR, VH, ha per espressione $\frac{(AC+AB+BC)\times VR}{2}$. Ora i due triangoli rettangoli BMV, BHV sono perfettamente uguali (55), come aventi la medesima ipotenusa, ed i lati eguali VM, VH; dunque BM=BH; e parimente AR=AM, CR=CH; dunque AC+AB+BC, ossia AC+AM+MB+CH+BC=AC+AR+BH+BH+CR =2AC+2BH=$2x+2y$. Dunque . . . . $\frac{[AC+AB+BC]\times VR}{2}=bx+by$. Eguagliando fra loro i due valori dell' area del triangolo, si avrà l'equazione (A) $\frac{ax}{2}=bx+by$, ossia $ax=2bx+2by$.

L' angolo ABC essendo diviso in due parti eguali dalla retta BZ, il punto Z è il mezzo dell' arco AZC ed il raggio OZ è perpendicolare sul mezzo della corda AC. Dunque CQ o AQ=$\frac{x}{2}$, QO $=\sqrt{\left(cc-\frac{xx}{4}\right)}$, QZ=OZ—OQ=$c-\sqrt{}$ . . . . . . $\left(cc-\frac{xx}{4}\right)$. I due triangoli rettangoli simili BHV, CQZ danno QZ . . . .

$$\left(c-\sqrt{\left(cc-\frac{xx}{4}\right)}\right) : CQ \left(\frac{x}{2}\right) ::$$

VH (b): BH (y); donde si ricava l'equazione (B) $cy-y\sqrt{\left(cc-\frac{xx}{4}\right)}=\frac{bx}{2}$.

Se in questa equazione si metta, in vece di y,

il suo valore $\frac{ax-2bx}{2b}$, dato dall' equazione (A), si avrà $\left(\frac{ax-2bx}{2b}\right) \times \left(c-\sqrt{\left(cc-\frac{xx}{4}\right)}\right) \ldots\ldots = \frac{bx}{2}$; il che dà $x=\pm\frac{2b\sqrt{(2ac-4bc-bb)}}{a-2b}$, e conseguentemente $y=\pm\sqrt{(2ac-4bc-bb)}$.

Essendo nota la base x del triangolo, possiamo costruirlo nel modo seguente.

Avendo preso sul diametro AM (Fig. 177.) del circolo grande, la parte AF$=a-2b$, ed avendo alzata, al punto F, la perpendicolare FI, conducasi la corda AI, sopra la quale, come diametro, si descriverà il semicircolo AFI. Sia iscritta in questo semicircolo, la corda IL$=b$; e si tiri la corda LA che si prolungherà indefinitamente verso K. Se si congiungano i punti L ed F, colla retta LF; e se, avendo preso AP$=2b$, si conduca, pel punto P, la retta PK, parallela ad FL: si avrà AK$=x=\frac{2b\sqrt{(2ac-4bc-bb)}}{a-2b}$. Imperciocchè, essendo AI media proporzionale fra AM ($2c$) ed AF ($a-2b$), si ha $(AI)^2=2ac-4bc$; ed a motivo del triangolo rettangolo ALI, AL$=\sqrt{[(AI)^2-(IL)^2]}=\sqrt{(2ac-4bc-bb)}$. Ora, per le parallele FL, PK, si ha la proporzione AF [$a-2b$] : AL $\sqrt{(2ac-4bc-bb)}$ :: AP ($2b$) : AK$=\frac{2b\sqrt{(2ac-4bc-bb)}}{a-2b}$. . .

Quindi AK è uguale alla base del triangolo; e per conseguenza, iscrivendo nel circolo grande, la corda AC eguale ad AK, avremo la base AC del nostro triangolo. Da un punto qualunque C di questa base, sia innalzata una perpendicolare CS$=a$; e per lo punto S, sia condotta parallelamente a CA,

la retta SB′B, che incontrerà la circonferenza del circolo grande nei punti B e B′, che si potranno prendere ciascuno indifferentemente pel vertice del triangolo cercato ABC, o AB′C. Questi due triangoli che sono perfettamente uguali, soddisfano l'uno e l'altro ai valori positivi di x e di y. La costruzione è la medesima pei valori negativi, i quali non differiscono dai positivi, che nella situazione rispettiva delle linee.

Non ho bisogno di fare osservare, giacchè le nostre equazioni lo dicono abbastanza, che il problema sarebbe impossibile, se si avesse $2ac < 4bc + bb$.

308. Osservazione I. Se si fosse preso per incognita il segmento AD, o qualche altra linea analoga, l'equazione finale sarebbe stata d'un grado più alto. Imperciocchè sia (Fig. 176.) l'incognita AD$=z$, e riteniamo le stesse denominazioni di sopra. Dal centro O del circolo circoscritto, si conduca ON perpendicolare ad AB. Si avrà

$$\mathrm{AN} = \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(aa+zz)}}{2};\ \mathrm{ON} = \sqrt{((\mathrm{OA})^2 - (\mathrm{AN})^2)} = \frac{\sqrt{(4cc-aa-zz)}}{2};\ \mathrm{CD} = \mathrm{AC} - \mathrm{AD} = x - z.$$

Ciò posto, i triangoli rettangoli simil CDB, ONA danno CD $(x-z)$: BD (a) :: ON

$$\left(\frac{\sqrt{(4cc-aa-zz)}}{2}\right) : \mathrm{AN} \left(\frac{\sqrt{(aa+zz)}}{2}\right) \ldots$$

Donde si ricava (quadrando ciascun termine, facendo il prodotto degli estremi e quello dei medj, ed ordinando l'equazione per rapporto a z)

$$\left.\begin{matrix} z^4 - 2xz^3 + 2aa \\ +xx \end{matrix}\right\} z^2 - 2a^2xz + \left.\begin{matrix} a^2x^2 \\ +a^4 \\ -2a^2c^2 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Si vede che ad una stessa x corrispondono quattro z. Difatti (Fig. 177), l' incognita z può rappresentare egualmente il segmento DA, o il segmento DC, o il segmento D'A, o il segmento D'C; perciocchè, qualunque sia quello di questi segmenti, che si prenda per incognita, quest' incognita si combinerà sempre nella stessa maniera colle quantità date, e si giugnerà sempre alla medesima equazione finale.

309. Osservazione II. Di qui ricaviamo questa regola, per giugnere ad equazioni che siano le più semplici cha sia possibile. Se in una questione geometrica si trovano due quantità incognite che abbiano colle quantità date una relazione tale, che prendendo l' una o l' altra per incognita, l' equazione finale sia della medesima specie, ovvero, se facendo entrare queste due quantità nel calcolo i termini in cui esse si trovano, sono simili, da alcune differenze in fuori, nei segui che li precedono; in tal caso non si deve prendere per incognita nè l' una nè l' altra quantità; ma si deve scegliere per incognita un' altra quantità che ad esse si riferisca similmente. Ecco perchè nell' esempio precedente, in vece di prendere per incognita uno dei segmenti della base, conviene piuttosto di prendere per incognita la base AC, che si riferisce similmente a questi segmenti. Abbiamo fatto uso di questa regola in alcuni dei problemi che abbiamo risoluto; e se ne riconoscerà egualmente l' utilità in quelli che ci potremo proporre.

310. SCOLIO. I problemi precedenti mi sembrano bastanti per mettere un Lettore intelligente in istato di esercitarsi sopra altre questioni della medesima natura. D' altronde, si troveranno ancora nel seguito di questo Trattato, differenti applicazioni dell' Algebra alla Geometria, le quali faranno conoscere sempre più lo spirito e la scelta

dei mezzi che si devono impiegare, per unire insieme queste due scienze. Finisco col dare qui, la costruzione generale delle equazioni dei due primi gradi. L'ordine sembrava esigere che cominciassi a spiegare il modo di costruire le equazioni prima di dare dei problemi; giacchè non si può ricavare alcuna espressione geometrica dall'equazione finale d'un problema, se non si sa costruirla. Ma io non ho voluto principiare con regole generali, che si ha sempre della difficoltà a concepire distintamente, se non sono accompagnate da alcune applicazioni; ed ho preferito di dare delle costruzioni particolari di seguito a ciascun problema particolare. Adesso che si scorge chiaramente lo scopo delle costruzioni, ecco, in poche parole, il metodo di costruire in generale le equazioni dei due primi gradi, o, ciò che torna allo stesso, le quantità razionali, ed i radicali del secondo grado.

Costruzione generale delle equazioni di primo grado.

311. Sia primieramente da costruirsi l'equazione $x = \frac{ab}{c}$: si cercherà una quarta proporzionale alle tre linee c, a, b.

Sia $x = \frac{abe}{cd}$; si cercherà, come nell'esempio precedente, il valore di $\frac{ab}{c}$. Chiamiamo f questo valore: si tratterà di costruire $\frac{fe}{d}$; il che si farà col cercare una quarta proporzionale alle tre linee d, f, e.

Così di seguito, se i termini della frazione avessero un maggior numero di dimensioni.

Se il valore dell' incognita fosse composto di più frazioni: per esempio, se si avesse

$x = \frac{ab}{c} + \frac{fgh}{lm} - \frac{mnpq}{rst}$, si cercherebbero successivamente i valori di tutte queste frazioni, e si unirebbero insieme coi segni convenevoli: questo aggregato sarebbe il valore di x.

312. I medesimi mezzi servono a trasformare un rettangolo in un altro di cui sia dato un lato; un solido, in un altro di cui siano dati due lati; un prodotto di quattro dimensioni, in un altro di cui siano dati tre dimensioni, ec. Imperciocchè, sia per esempio, il quadrato bb che si voglia trasformare in un rettangolo che abbia la lettera arbitraria a per uno dei suoi lati; divido bb per a, il che dà per quoto $\frac{bb}{a}$; e cerco, col metodo precedente una linea eguale a $\frac{bb}{a}$. Chiamiamo m questa linea; avremo $\frac{bb}{a} = m$, e per conseguenza $bb = am$.

Se si avesse ffc da trasformare, in modo che il nuovo solido contenesse ab: si cercherebbe una linea n eguale ad $\frac{ffc}{ab}$, e si avrebbe $\frac{ffc}{ab} = n$ e per conseguenza $ffc = nab$; ec.

313. Supponiamo ora che abbiasi da costruire una frazione, il cui denominatore sia complesso: si procederà come negli esempj che seguono.

Sia $x=\frac{a^3}{bb+cc}$. Trasformo uno dei termini del denominatore, per esempio cc, in un altro che contenga la lettera b, cosicchè si abbia $cc=bm$, e per conseguenza $x=\frac{a^3}{bb+bm}=\frac{a^2}{b}\times\frac{a}{b+m}$. Cerco il valore del fattore $\frac{a^2}{b}$, e lo chiamo n; il che dà $x=\frac{na}{b+m}$: e considerando $b+m$ come una sola linea, cerco una quarta proporzionale a questa linea, ed alle due linee n ed a: questa quarta proporzionale è il valore di x.

Sia $x=\frac{f^3c}{a^3+b^3}$. Trasformo il termine b^3 del denominatore, in un altro aan; il che dà
$x=\frac{f^3c}{a^3+aan}=\frac{f^2}{a}\times\frac{f}{a}\times\frac{c}{a+n}$. Cerco il valore di $\frac{f^2}{a}$, e lo chiamo m; cerco il valore di $\frac{mf}{a}$, e lo chiamo p; perfine cerco il valore di $\frac{pc}{a+n}$, ed è quello di x.

Sia $x=\frac{bcd}{gg+hk+lm}$. Si farà $hk=gn$; $lm=gq$; il che dà $x=\frac{bcd}{gg+gn+gq}=\frac{bc}{g}\times\frac{d}{g+n+q}$. Allora non si tratta più che di cercare primieramente una quarta proporzionale (che chiamo p) alle tre linee rappresentate da g, b, c; ed in seguito

una quarta proporzionale alle tre linee rappresentate da $(g+n+q)$, p; d.

In simil modo si opererà pei casi, in cui il denominatore della frazione contenesse un maggior numero di termini, qualunque siano d' altronde le dimensioni di questi termini.

Se il numeratore della frazione fosse complesso: per esempio, se si avesse $x=\frac{a^3+bcd-fgh}{pq+hk+rs}$; si scriverebbe questa quantità così, $x=\frac{a^3}{pq+hk+rs}+\frac{bcd}{pq+hk+rs}-\frac{fgh}{pq+hk+rs}$. Allora non si tratta più che di costruire, come abbiamo spiegato, tutte le parti di questa quantità, e di unire insieme i loro valori coi segni che precedono i termini del numeratore della frazione proposta.

Se il valore dell' incognita è composto di diverse frazioni: per esempio, se si ha . . . . r . $x=\frac{a^3+c^3+d^3}{c^2+d^2+f^2}-\frac{(gh+mn-rs)}{t+u}$, si cercheranno successivamente i valori delle due parti del secondo membro, e si sottrarrà il secondo valore dal primo.

Osserveremo che in certi casi che sembrano riferirsi al precedente, ci possiamo dispensare dal ricorrere alle trasformazioni delle quali abbiamo fatto uso. I casi, di cui intendo parlare, sono quelli ne' quali il numeratore ed il denominatore si possono risolvere in fattori d' una dimensione.

Sia, per esempio $x=\frac{aab-2amb+m^2b}{aa-cc}$. Osservo che questa quantità è la stessa cosa di . . . .

$x = \frac{b(a-m)^2}{(a+c)\,(a-c)}$, ossia $x = \frac{b(a-m)}{a+c} \times \frac{a-m}{a-c}$.
Quindi, per avere il valore di x, si tratta di cercare primieramente una quarta proporzionale (che chiamo n) alle tre linee rappresentate da $a+c$, b, $a-m$, ed in seguito una quarta proporzionale alle tre linee rappresentate da $a-c$, n, $a-m$.

314. Si può spesse volte abbreviare la costruzione d'una quantità razionale, e renderla elegante per mezzo delle proprietà del circolo o del triangolo rettangolo. Eccone alcuni esempj.

Sia $x = \frac{bb+bc}{a}$. Sopra AD $= b+c$, come diametro (Fig. 178), descrivo il semicircolo ACD; poi avendo preso $AB = b$, ed avendo alzata la perpendicolare BC, tiro le due corde AC, CD; prendo sopra CD, prolungata, se fosse necessario, la parte $CE = a$, ed avendo condotta la retta AE, innalzo all'estremità A di questa linea, la perpendicolare AF che incontri in F la corda DC prolungata: allora la parte CF è il valore di x, imperciocchè (166) $(AC)^2 = AB \times AD = b(b+c) = bb+bc$, e per conseguenza $AC = \sqrt{(bb+bc)}$. Ora, pei triangoli rettangoli simili ACE, FCA si ha la proporzione continua $\div\!\div$ $EC\ (a) : AC\ (\sqrt{(bb+bc)}) : CF = \frac{bb+bc}{a} = x$.

Sia $x = \frac{aa+bb}{m}$. Costruisco il triangolo ACD (Fig. 179), rettangolo in C, il cui lato $CA = a$, il lato $CD = b$, e per conseguenza l'ipotenusa AD $= \sqrt{(aa+bb)}$. Sulla CD prendo $CE = m$, e prolungata la CA verso M, finchè sia $CM = AD$, congiungo i punti E ed M colla retta EM, sopra la quale innalzo la perpendicolare MF, che incontri

in F il prolungamento di DC: allora CF è il valore di x. Imperciocchè $CM = AD = \sqrt{(aa+bb)}$; e si ha la proporzione continua ∺ CE (m): CM$(\sqrt{(aa+bb)})$:CF $= \frac{aa+bb}{m} = x$.

Sia $x = \frac{aa-bb}{m}$. Costruisco un triangolo rettangolo ACD (Fig. 180), la cui ipotenusa AD $=a$, il lato CD$=b$, e per conseguenza il lato AC$=\sqrt{[aa-bb]}$. Fo CL$=m$; congiungo i punti E ed A, colla retta EA, all' estremità della quale innalzo la perpendicolare AF, che incontri LC, prolungata in F. CF è il valore di x.

515. *Osservazione.* Si deve notare che l' espressione di una linea essendo necessariamente d' una sola dimensione, se la quantità che è data per rappresentare una linea, non è soggetta a questa legge, si deve cominciare a ridurvela, con moltiplicarla, o dividerla per una potenza convenevole d' una linea sottintesa, o scelta arbitrariamente per unità. Sia, per esempio, $x = \frac{ab}{cd}$, quantità nella quale, a, b, c, d, x esprimono ciascuna una linea. Siccome la frazione $\frac{ab}{cd}$ è di dimensione *nulla*, ossia rappresenta un numero assoluto, atteso che il quoto de prodotto ab, che è di due dimensioni, diviso pel prodotto cd della stessa natura, non può essere che un numero astratto; così vi è una linea, presa per unità, che è sottintesa. Sia m questa linea, e moltiplichiamo la frazione $\frac{ab}{cd}$ per m, il che non ne cambia il valore: avre-

mo $x=\frac{mab}{cd}$, quantità d' una dimensione, che si costruisce, come abbiamo spiegato.

Se si avesse $x=\frac{b}{c^3+eg+h}$, si prenderebbe m per unità, e si ridurrebbe questa quantità alla forma $x=\frac{bm^3}{c^3+egm+hm^2}$, con moltiplicare il suo numeratore per m^3, il secondo termine del suo denominatore per m, ed il terzo per m^2 Così delle altre.

Costruzione generale delle equazioni di secondo grado.

316. Tutte le equazioni del secondo grado possono essere rappresentate da $xx\pm ax\pm bc=0$, ovvero da $xx\pm ax\pm dd=0$, col trasformare il rettangolo bc in quadrato dd. Questa equazione dà le quattro formole.

I. $xx+ax-dd=0$, ossia $x=-\frac{a}{2}$ . . . . $\pm\sqrt{\left(\frac{aa}{4}+dd\right)}$,

II. $xx-ax-dd=0$, ossia $x=+\frac{a}{2}$ . . . . $\pm\sqrt{\left(\frac{aa}{4}+dd\right)}$,

III. $xx+ax+dd=0$, ossia $x=-\frac{a}{2}$ . . . . . $\pm\sqrt{\left(\frac{aa}{4}-dd\right)}$,

IV. $xx-ax+dd=0$, ossia $x=+\frac{a}{2}$ . . . . .
$\pm\sqrt{\left(\frac{aa}{4}-dd\right)}$.

Nelle costruzioni che siamo per dare di queste formole, supporremo che le quantità positive vanno da sinistra a destra, e che per conseguenza le quantità negative vanno da destra a sinistra.

Per costruire le due prime, fate un triangolo *ABC* [Fig. 181] rettangolo in *B*; nel quale $BA = \frac{a}{2}$, $BC=d$, e per conseguenza AC . . . . $=\sqrt{\left(\frac{aa}{4}+dd\right)}$. Prendete, dall' una, e dall' altra parte del punto A, le linee AO, AM, MK, eguali ciascuna ad AB, ed MN uguale ad AC, avrete . . . .

$$\left.\begin{aligned} OC &= \sqrt{\left(\frac{aa}{4}+dd\right)}-\frac{a}{2} \\ AN &= -\left(\sqrt{\left(\frac{aa}{4}+dd\right)}+\frac{a}{2}\right) \end{aligned}\right\} \text{per la 1. formola}$$

$$\left.\begin{aligned} MC &= \sqrt{\left(\frac{aa}{4}+dd\right)}+\frac{a}{2} \\ KN &= -\left(\sqrt{\left(\frac{aa}{4}+dd\right)}-\frac{a}{2}\right) \end{aligned}\right\} \text{per la 2. formola.}$$

Medesimamente per costruire le due ultime formole (nelle quali suppongo $\frac{aa}{4} > dd$, affinchè queste formole siano reali) fate un triangolo rettangolo

ABC Fig. 182), la cui ipotenusa AC$=\frac{a}{2}$, il lato $BC=d$, e per conseguenza il lato AB . . . . $=\sqrt{\left(\frac{aa}{4}-dd\right)}$. Prendete ciascuna delle tre linee AO, AM, MK, uguale ad AB, e la linea MN=AC: avrete . . . . d

$$\left.\begin{array}{l} KN=-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{aa}{4}-dd\right)}\right) \\ AN=+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{aa}{4}-dd\right)}\right) \end{array}\right\} \text{per la 3. formola}$$

$$\left.\begin{array}{l} MC=\frac{a}{2}+\left(\frac{aa}{4}-dd\right) \\ OC=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{aa}{4}-dd\right)} \end{array}\right\} \text{per la 4. formola.}$$

CAPO II.

Delle linee curve in generale.

517. Ogni linea curva può essere considerata come descritta dal moto d' un punto che cambia continuamente direzione. Ora si giunge a conoscere ad ogn' istante, la posizione di questo punto nello spazio, e per conseguenza la traccia che lascia dietro di se, col determinare, a norma della legge con cui si muove, le sue distanze da linee rette fisse, come prendiamo a spiegare ne' due seguenti problemi, uno dei quali è l' inverso dell' altro. Supporremo sempre che le curve e le linee che vi si riferiscono siano situate nel medesimo piano.

Si vede che trattasi solamente di curve soggette

ad un andamento regolare, e non già di curve tirate a caso, simili alle linee che uno scrittore tira senza ordine e senza metodo sopra la carta.

318. PROBLEMA I. *Formare un' equazione che dia continuamente la posizione d' un punto mobile sopra un piano.*

Condotte in questo piano le due rette AZ, AQ, (Fig. 183), che concorrano, sotto un angolo arbitrario, ma dato, in un punto determinato A, tiro da un punto qualunque M della curva OMK che il punto mobile descrive, la retta MP, parallela ad AQ, che determini sulla AZ una parte AP; formo in conseguenza della legge che regola la generazione della curva OMK, un' equazione che esprima la relazione tra AP e PM, tale che essendo nota una di queste linee, si faccia nota anche l' altra; il che dà evidentemente la posizione del punto M in ciascun istante.

L' equazione di cui si tratta, chiamasi *equazione della curva.* Le rette AP si chiamano le *ascisse*; le rette PM, le *ordinate*; l' ascissa AP e l' ordinata PM, che corrispondono al medesimo punto M della curva, le *coordinate*; la retta AZ, l' *asse delle ascisse* o semplicemente l' *asse*; la retta AQ, l' *asse delle ordinate*; l' angolo ZAQ, l' *angolo delle coordinate*; il punto fisso A, l' *origine delle coordinate* o semplicemente l' origine.

Esempio I. *Sia un circolo X* [Fig. 184], *di cui è proposto esprimersi la natura con una equazione.*

Scelgo sopra il piano di questo circolo, il punto fisso A, dal quale conduco, sotto un angolo noto, i due assi AZ, AQ, ai quali mi propongo di riferire tutti i punti della circonferenza. Poi avendo preso sulla AZ l' ascissa qualunque AP, guido parallelamente ad AQ, l' ordinata corrispondente PM, che prolungata verso m, incontri in R il diametro BD, che suppongo parallelo ad AZ. Secondo ciò che precede, bisogna dedurre dalla

proprietà del circolo, e rappresentare con un' equazione la relazione delle rette AP, PM. Per ciò, si condurrà, dal punto M, la retta VMO perpendicolare alle rette *AZ*, *BD*, e si tirrà, dall' estremità *B* del diametro, la retta *BT*, parallela ad *AQ*; si prolungherà il diametro *BD*, finchè incontri in K la retta *AQ*. In seguito si osserverà che il circolo X essendo dato di grandezza, ed essendo altresì data la sua posizione nell' angolo *ZAQ* delle coordinate; il raggio CB, le linee *AT*, *TB*, *CK*, il seno dell' angolo *MPO*, o del suo eguale *MRV*, sono quantità tutte cognite, per ipotesi, e sempre costanti, in qualunque luogo della circonferenza sia situato il punto M. Ma le coordinate *AP*, *PM* sono indeterminate, ed i ragionamenti che si faranno per trovare l' equazione che deve esprimere la relazione di queste linee colle altre, non devono già convenire solamente al un punto determinato della circonferenza, ma essere applicabili a tutti in generale. Ciò posto,

Siano
- il raggio *CB*. . . . . $= a$.
- *CK*. . . . . $= b$.
- *BT*. . . . . $= c$.
- il raggio o seno totale. . . . $= 1$
- il seno dell' anglo *MPO*, o dell' angolo *MRV*. . . . . . $= p$.
- il suo coseno oil seno di ciascuno degli angoli *PMO*, *RMV*. $= q$
- l' ascissa *AP*. . . . . . . $= x$.
- l' ordinata *PM*. . . . . . . $= y$

La legge che regola la lescrizione del circolo, è che il raggio *CM* sia semre della stessa lunghezza, da qualunque parte s prenda il punto *M* sulla circonferenza. Ora, pel triangolo *CVM*, si ha $(CM)^2=(VM)^2+(VC)^2$; qindi per formare l'equazione del circolo, bisogna cercare i valori dei qua-

drati di VM e di VC; aggiungere insieme questi valori, ed uguagliare la somma al quadrato del raggio CM. Ma (257) $VM = RM \times \frac{p}{1} = (PR - PM) \times p = (c-y)p$, e $VR = (c-y)q$. Da un altro canto, $VC = VR + RC = VR + KC - KR = VR + KC - AP = (c-y)q + b - x$. Dunque $(VM)^2 = ((c-y)p)^2 + ((c-y)q + (b-x))^2$: quantità che bisogna uguagliare ad a^2 valore di $(CM)^2$. Si avrà dunque l'equazione $(c-y)p)^2 + ((c-y)q + b - x)^2 = a^2$, cioè a dire, $(c-y)^2 . (pp+qq) + 2(c-y)\ q.\ (b-x) + (b-x)^2 = a^2$. Donde si ricava (osservando che $pp+qq=1$, effettuando i quadrati indicati, e mettendo tutt'i termini da una stessa parte) $(A) yy - 2cy + cc + 2q(bc - cx - by + xy) + xx - 2bx + bb - aa = o$.

Questa equazione esprime in generale la natura del circolo riferito alle coordinate AP e PM; e si vede che dando diferenti valori ad x, si avranno i valori corrispondenti di y, e reciprocamente. Ad un medesimo valore di x corrispondono due valori di y; ed uno di questi valori esprime l'ordinata PM, l'altro l'ordinata Pm; perciocchè sebbene non siasi cerca che la relazione di AP e di PM, si sarebbe trovata del pari la relazione di AP e di Pm, e quest relazione sarebbe stata espressa dalla medesima equazione. Non vi è adunque alcuna ragione perchè y esprima piuttosto PM che Pm; e conseguentemente y deve esprimere l'una e l'altra linea, d avere così due valori, corrispondenti ad una medesima ascissa.

Se, in vece di supporre che l'angolo QAZ delle coordinate sia obbliquo, si supponesse che fosse retto (Fig. 185.), l'equazione si semplificherebbe; perciocchè allora $q=o$, e per conseguenza l'equazione (A) diverrebbe

$(B) yy - 2cy + cc + xx - bx + bb - aa = o$.

Se l'angolo delle coordinate essendo retto, si

suppone di più (Fig. 186.) che l'origine A cada sul punto T, allora si ha $b=a$, e l'equazione (B) diventa

$(C) yy-2cy+cc+xx-2ax=o$.

Se essendo retto l'angolo delle coordinate, e $b=a$, si supponga inoltre che l'origine A cada sul punto B (Fig. 187.), allora $c=o$, e l'equazione (C) diventa

$(D) yy+xx-2ax=o$, ossia $yy=2ax-xx$.

Dalle differenti equazioni (A), (B), (C), (D), si scorge, come il circolo senza cambiare di grandezza e di posizione, possa essere riferito a differenti assi. Lo stesso succede in tutte le curve.

Esempio II. *Trovare l'equazione della curva* OMK (Fig. 188.), *descritta da un punto* M *dato sopra una riga* CB, *che si muove nell' angolo retto* QAZ, *in modo che il punto* A *scorra lungo la* QA, *mentre il punto* C *scorre lungo la* AZ.

Prendo AZ per l'asse delle ascisse, AQ per quello delle ordinate. Essendo la riga BC in una posizione qualunque, dal punto descrivente M, conduco MP perpendicolare ad AZ, ed MN perpendicolare ad AQ. Le rette MB, MC conservano sempre la medesima lunghezza, durante il moto della riga; ma le coordinate AP e PM variano continuamente.

Siano $\begin{cases} MB \ldots\ldots\ldots\ldots = a \\ MC \ldots\ldots\ldots\ldots = b \\ AP \ldots\ldots\ldots\ldots = x \\ PM \ldots\ldots\ldots\ldots = y. \end{cases}$

Egli è chiaro che si avrà $BN=\sqrt{aa-xx}$). I triangoli simili CPM, MNB, danno $CM\ (b) : MP\ (y) :: MB\ (a) : BN\ (\sqrt{(aa-xx)})$; donde si ricava l'equazione $b\sqrt{(aa-xx)}=ay$, ovvero (facendo sparire il radicale, ed ordinando per rap-

rotto ad y, $yy+\frac{b^2x^2-a^2b^2}{a^2}=0$, che è l' equazione cercata. Dando ad x differenti valori, si avranno i valori corrispondenti di y: e reciprocamente.

319. PROBLEMA I. *Trovare i punti pei quali deve passare una curva di cui è data l' equazione.*

Prendo, perciò, nel piano sul quale la curva deve essere descritta, un punto fisso ad arbitrio, per servire di origine alle coordinate; guido, per questo punto, i due assi, che comprendano tra loro un angolo dato, che è quello delle coordinate; suppongo che una delle due variabili contenute nell' equazione, esprima successivamente le ascisse della curva, mentre l' altra variabile esprime successivamente le ordinate corrispondenti; e cerco, colla risoluzione esatta o prossima dell' equazione, le ordinate che corrispondono a ciascuna ascissa data. Trovata ciascuna ordinata, ed unita insieme colla sua ascissa, le estremità di tutte le ordinate formano una serie di punti per cui deve passare la curva.

Esempio I. *Si domanda la descrizione della curva rappresentata dall' equazione* $aay+ax^2-x^3=0$; *esprimendo a una linea retta costante, x ed y le coordinate della curva.*

Siano (Fig. 189.] *A* l' origine delle coordinate che suppongo perpendicolari tra loro, e che prendo sulle linee AZ, AQ. Supporrò che le ascisse positive vanno, per rapporto al punto A, pel verso AZ, e che per conseguenza le ascisse negative, che devono essere prese in senso contrario, vanno pel verso *Az*; che le ordinate positive vanno, per rapporto al medesimo punto *A*, nel verso di *AQ*, e che per conseguenza le ordinate negative vanno pel verso *Aq*.

Avendo messa l' equazione proposta, sotto que-

sta forma; $y=\frac{x^3-ax^2}{a^2}$, do successivamente differenti valori ad x, e cerco i valori di y, che loro corrispondono.

Sia primieramente $x=o$, si avrà eziandio $y=o$. Ora, l'ascissa e l'ordinata essendo l'una e l'altra zero al punto A, egli è chiaro, che questo punto è uno di quelli della curva.

Sia $x=\frac{a}{4}$, si avrà $y=-\frac{3a}{64}$; donde si scorge che all'ascissa positiva $\frac{a}{4}$ corrisponde un'ordinata negativa, ed uguale a $\frac{3a}{64}$. Quindi, se si prenda sulla AZ, la parte $AP'=\frac{a}{4}$, e s'innalzi dalla sua estremità P', nell'angolo AZq, l'ordinata $P'M'=\frac{3a}{64}$: il punto M' apparterrà alla curva.

Sia $x=\frac{a}{2}$, si avrà $y=-\frac{a}{8}$. Quindi prendendo l'ascissa positiva $AP''=\frac{a}{2}$, e l'ordinata negativa $P''M''=\frac{a}{8}$; il punto M'' apparterrà del pari alla curva.

Sia $x=\frac{3a}{4}$; si avrà $y=-\frac{9a}{64}$. Dunque, prendendo l'ascissa positiva $AP'''=\frac{3a}{4}$, e l'ordinata ne-

gativa $P'''M'''=-\frac{9a}{64}$; il punto M''' sarà benanche della curva.

In generale, qualunque sia il valore positivo di x, purchè questo valore sia minore di a, il valore corrispondente di y è negativo. E se si fa $x=a$, il valore di y è zero; onde ne segue che la curva, dopo essersi gettata al di sotto dell'asse AZ, risale e viene a tagliare questo asse nel punto P^{IV}, al quale corrisponde l'ascissa $AP^{\text{IV}}=a$.

Facendo in seguito generalmente $x>a$, y sarà positiva, ed aumenterà a misura dell'aumento di x. Quindi dopo il punto P^{IV}, la curva si alza sopra l'asse AZ, e spigne all'infinito il ramo $P^{\text{IV}}M$.

Esaminiamo adesso la figura di questa curva dalla parte delle x negative.

Si vede che dando dei valori negativi ad x, i valori di y saranno sempre negativi. Quindi, la parte della curva, che corrisponde alle x negative, cade intieramente nell'angolo qAz, e si estende all'infinito verso m.

La curva intera rappresentata dall'equazione proposta, è dunque $M\,P^{\text{IV}}\,M'''\,M''\,M'\,Am$. Si possono determinare quanti punti si vogliano, e si descriverà tanto piu esattamente, quanti se ne saranno presi di vantaggio.

Questa maniera di descrivere una curva colla determinazione delle ascisse e delle ordinate corrispondenti, chiamasi *descrizione per punti*, perchè difatti non si trova con ciò se non se un certo numero (finito) di punti, pei quali la curva deve passare, e che per descriverla a rigore, bisognerebbe determinare un numero infinito di questi punti.

Esempio II. *Descrivere la curva rappresentata*

dall' equazione $x^2y^2-2aax+a^4=0$; *essendo* x *ed* y *le coordinate*, a *una linea costante*.

Siano (Fig. 190) A l'origine, AZ ed AQ, gli assi delle coordinate, supposte perpendicolari tra loro. Prenderemo, come sopra, le ascisse positive nel verso di AZ, le ordinate positive nel verso AQ; e per conseguenza le ascisse negative nel verso di Az, e le ordinate negative nel verso di Aq.

L' equazione proposta dà $y=\pm\frac{\sqrt{(2a^2x^2-a^4)}}{x}$

Donde si vede che facendo l'ascissa $x=0$, la doppia ordinata corrispondente è immaginaria; il che vuol dire che all' ascissa zero non corrisponde alcuna ordinata, ossia che l' origine A delle coordinate non è punto della curva.

Dando ad x un valore minore di $\frac{a}{\sqrt{2}}$, la doppia ordinato corrispondente è sempre immaginaria. Quindi la curva non ha alcun punto che corrisponda a queste ascissse. Ma facendo $x=\frac{a}{\sqrt{2}}=AP$, si avrà $y=0$; e per conseguenza il punto P appartiene alla curva. Facendo in seguito generalmente x o sia $AP'>\frac{a}{\sqrt{2}}$, si avranno due ordinate reali ed uguali l' una P'M che è positiva, l' altra P'N, che è negativa. Queste due ordinate aumenteranno a misura che aumenta l' ascissa corrispondente AP' (*). Onde ne segue che la curva ha due rami PM, PN, che si

(*) Ciò si deve intendere colla restrizione che x sia sempre finita.

estendono all' infinito, uno al di sopra, e l'altro al di sotto dell' asse AZ.

Prendiamo adesso x nel senso negativo. Noi vediamo che fintanto che $-x$ sarà minore di $\frac{a}{\sqrt{2}}$, i valori di y sono immaginarj. Ma se si fa $-x$ ossia $Ap = \frac{a}{\sqrt{2}}$, si avrà $y=0$. Quindi il punto p appartiene alla curva.

Facendo in seguito $-x$ ossia Ap', maggiore di $\frac{a}{\sqrt{2}}$, si avranno due ordinate $p'm'$, $p'n'$ l' una positiva, l' altra negativa, che aumenteranno a misura che aumenterà Ap'. Dunque la curva ha ancora due rami pm', pn', che si estendono all' infinito al di sopra ed al di sotto dell' asse Az.

Da questo esempio si scorge, che essendo reale l' ascissa d' una curva, l' ordinata corrispondente può essere immaginaria, e che allora non esiste alcun punto della curva, che corrisponda all' ascissa di cui si tratta. Ciò serve a spiegare come possa succedere che un problema determinato sia impossibile, quantunque l' equazione finale dia per l' incognita ch' ella racchiude, un valore reale. Imperchiocchè, riguardando questa incognita come l' ascissa d' una curva, e supponendo che un' altra incognita, dipendente della prima, sia ordinata; se il valore di questa ordinata, corrispondente al valore trovato per l' ascissa, è immaginario, il problema sarà impossibile. Tale è il problema dell' articolo 305, relativamente al valore negativo di x, nel caso in cui si avesse $bb<8aa$; poichè a questo valore che è reale, corrispondono due valori immaginarj di y; il che indica due soluzioni impossibili.

CAPO III.

Delle Sezioni coniche.

320. Si chiama in generale *sezione conica*, la traccia formata sopra la superficie d'un cono da un piano che lo sega.

Supporrò che il cono sia retto: si vedrà facilmente che le sezioni del cono obbliquo sono della medesima natura, ossia sono espresse da equazioni del medesimo grado di quelle del cono retto.

321. Può accadere 1.° che il piano secante passi pel vertice del cono; 2.° che sia parallelo alla base del cono; 3.° che sia parallelo ad uno dei lati del cono; 4.° e 5.° che sia più o meno inclinato sulla base del cono che uno dei lati. Nel primo caso la sezione è un triangolo rettilineo; nel secondo è un circolo; poichè la sezione è simile alla base (215): quì non si tratterà, almeno direttamente, di questi due casi. Nel terzo, la sezione è una *parabola*. Nel quarto in cui il piano segherà i due lati opposti del cono, la sezione è un' *elisse*. Nel quinto, in cui il piano sega uno dei lati, e soltanto il prolungamento del lato opposto, la sezione è un *iperbola*.

DELLA PARABOLA.

322. Sia (Fig. 191) SCEDF un cono retto, segato da un piano AEF, che suppongo perpendicolare al triangolo per l'asse SCD, e parallelo al lato SD: la sezione o *parabola* EAF sarà divisa in due parti eguali e simili dall'asse ABZ, condotto dal vertice A sul diametro CD della base del cono; ed il cono essendo supposto prolungato sino all'infinito, i rami della parabola ed il suo asse

ABZ si prolungheranno altresì sino all' infinito. Si tratta primieramente di formare una equazione che contenga la relazione fra l' ascissa qualunque AP, e l' ordinata corrispondente PM che è ad essa perpendicolare.

323. Teorema I. *Nella parabola, il quadrato variabile dell' ordinata PM è uguale al prodotto dell' ascissa variabile AP, per una quarta proporzionale alle tre altre linee fisse e date* (*) *AB, CB, BD, cioè a dire si ha* $(PM)^2 = AP \times \frac{CB \times BD}{AB}$.

Si conduca, per l' ordinata PM, un piano KMHM' parallelo alla base del cono, e che tagli, secondo KH, il triangolo SCD: la curva KMHM' sarà un circolo, che dà (131) $(PM)^2 = KP \times PH$. Ora, a motivo delle parallele AB, SD, e delle parallele PH, BD si ha PH=BD; e pei triangoli simili ABC, APK, si ha AB : BC :: AP : PK; il che dà $PK = \frac{AP \times BC}{AB}$; dunque, sostituendo in vece di PH e PK i loro valori, si avrà $(PM)^2 = AP \times \frac{BC \times BD}{AB}$.

324. Osservazione. Questa proprietà generale della parabola è la sorgente di tutte le altre. Entro ad esporre le principali, considerando la parabola come descritta sopra un piano, e facendo ormai astrazione dalla sua generazione dal solido. Farò lo stesso per le altre sezioni coniche.

(*) Queste linee sono date, perchè le dimensioni del triangolo SCD sono date, ed è data eziandio la posizione di AB in questo triangolo.

325. COROLLARIO I. Chiamando x l' ascissa AP; y, l' ordinata PM; m, la linea costante e data $\frac{BC \times BD}{AB}$, si avrà l' equazione $yy=mx$ che si chiama *equazione alla parabola*.

La linea m si denomina il *parametro* della parabola o dell' asse AB.

326. COROLLARIO II. La parabola si può costruire sopra un piano così. Avendo condotti gli assi perpendicolari AZ, QAq (Fig. 192) delle coordinate, prolungate l' asse ZA dalla parte di A, finchè la quantità AB sia uguale al parametro m; descrivete diversi circoli che avendo i loro centri sulla retta BZ, passino tutti pel punto B; ed i cui diametri siano maggiori di BA; dai punti P, Q, q, ove tagliano gli assi AZ, Qq, guidate parallelamente a questi assi, le rette PM, QM, Pm, Qm. Il luogo dei punti M, A, m, sarà la nostra parabola. Difatti si ha per la proprietà del circolo $(AQ)^2=AP \times AQ$. Ora PA=PM; dunque si avrà $(PM)^2=AP \times AB$, cioè a dire, $yy=mx$.

327. COROLLARIO III. I quadrati delle ordinate PM, P'M' (Fig. 193) stanno tra loro come le ascisse corrispondenti AP, AP'. Imperciochè $(PM)^2 = AP \times m$, $(P'M')^2=AP' \times m$; dunque $(PM)^2 : (P'M')^2 :: AP \times m : AP' \times m :: AP : AP'$.

328. COROLLARIO IV. Se da un punto qualunque K della parabola, conducasi la retta KH parallela all' asse AZ, e che incontri in H la doppia ordinata Mm; il prodotto della parte KH di questa linea nel parametro m, sarà uguale al prodotto delle due parti MH, Hm, della linea Mm; cioè a dire, si avrà KH, Hm della linea Mm; cioè a dire, si avrà $KH \times m = MH \times Hm$. Difatti, si ha $AP \times m = (PM)^2$; e se dal punto K si tiri KV perpendicolare ad AZ, si avrà parimente $AV \times m = (KV)^2 = (HP)^2$. Dunque $AP \times m - AV \times m = (PM)^2 - (HP)^2$.

Ora, $AP \times m - AV \times m = KH \times m$, e $(PM)^2 - (HP)^2 = MH \times Hm$, perchè la linea Mm è divisa in due parti eguali nel punto P (*). Dunque $KH \times m = MH \times Hm$.

329. PROBLEMA. *Trovare l' espressione della sottangente nella parabola.*

Si chiama in generale, *sottangente* d' una curva (Fig. 194), la parte PT dell' asse, compresa fra un' ordinata PM, e la tangente MT.

Per trovare l' espressione di PT nella parabola, si conduca pel punto M, la retta NMO che incontri la curva in un altro punto N, e l' asse AZ prolungato, nel punto O; si conduca di più l' ordinata NV all' asse OZ, e la retta MH parallela al medesimo asse.

Siano {
il parametro dell' asse AZ. . . $= m$;
l' ascissa AP. . . . . $= x$,
l' ordinata PM . . . . $= y$;
la parte PV dell' asse, compresa fra le due ordinate PM, VN . $= z$,
la parte NH dell' ordinata NV . . $= u$.
la parte PO dell' asse, compresa fra l' ordinata PM ed il punto O $= s$.

I triangoli simili OPM, MHN, danno PO (s) : PM (y) :: MH (z): HN $(u) = \frac{yz}{s}$. Ora, si ha yy

(*) Quando una linea Mm è divisa in due parti eguali al punto P, ed in due parti disuguali al punto H; il quadrato della metà di questa linea, meno il quadrato della parte compresa fra i due punti di divisione, è uguale al rettangolo dei due segmenti ineguali della medesima linea; cioè a dire, si ha $(PM)^2 - (HP)^2 = Hm \times MH$.

Imperciocchè $(PM)^2 - (HP)^2 = (PM + HP) \times (PM - HP) = (Pm + HP)(PM - HP) = Hm \times MH$.

$=mx$; $(y+u)^2=m(x+z)$, ossia $yy+2uy+u^2=mx+mz$. Sottraendo la prima di queste equazioni dalla seconda, si avrà $2uy+uu=mz$, ovvero (mettendo in vece di u il suo valore $\frac{zy}{s}$), $\frac{2zyy}{s}+\frac{z^2y^2}{s^2}$ $=mz$, ovvero $\frac{2yy}{s}+\frac{zy^2}{s^2}=m$.

Supponiamo ora che MH (z) diventi infinitamente piccola, egli è visibile che allora VN si confonde con PM, la secante NMO colla tangente MT, PO colla sottangente PT, e l'equazione $\frac{2yy}{s}+\frac{zy^2}{s^2}=m$, si riduce a $\frac{2yy}{s}=m$; donde si ricava s, ossia $PT=\frac{2yy}{m}=\frac{2mx}{m}=2x$ Quindi *la sottangente della parobola è doppia dell'ascissa corrispondente.*

330. COROLLARIO. Conoscendo l'ascissa AP (x), si conosce l'ordinata PM o y, in virtù dell'equazione $y=\sqrt{mx}$; si conosce eziandio PT, per l'articolo precedente; dunque si conoscerà la tangente TM, pel triangolo rettangolo TPM, che dà $TM=\sqrt{((PT)^2+(PM)^2)}$. Si conoscerà altresì la *normale* RM alla parabola, o alla tangente nel punto M, e la *sottonormale* RP; poichè i due triangoli rettangoli simili TPM, MPR, danno $TP : TM :: PM : MR=\frac{PM\times TM}{TP}$ e $PT : PM :: PM : PR=\frac{(PM)^2}{PT}$.

331. TEOREMA II. *Se si prenda sull' asse AZ* (Fig. 195.) *la parte AF uguale al quarto del parametro, e si conduca dal punto F al punto M* (*ove la retta TMV tocca la parabola*), *la retto FM; e dal punto M, la retta MH parallela all' asse AZ: i due angoli FMT, HMV saranno costantemente uguali.*

Si conduca, all' asse AZ, l' ordinata MP; e si chiami AP, x: il parametro, m. Egli è chiaro, che a motivo di AT=AP (329.), si avrà . . . . .

$FT=x+\frac{m}{4}$. Inoltre, si avrà $FP=AP-AF=x-\frac{m}{4}$, ovvero (se il punto P cadesse tra A ed F), $FP=\frac{m}{4}-x$; e per conseguenza nell' uno e nell' altro caso $(FP)^2=x^2-\frac{mx}{2}+\frac{m^2}{16}$. Dunque $(FM)^2=(PM)^2+(FP)^2=mx+x^2-\frac{mx}{2}+\frac{m^2}{16}=x^2+\frac{mx}{2}+\frac{m^2}{16}=\left(x+\frac{m}{4}\right)^2$; ed $FM=x+\frac{m}{4}$. Quindi FM=FT; e per conseguenza il triangolo FMT è isoscele. Onde ne segue che l' angolo FMT è uguale all' angolo FTM, o al suo eguale HMV.

332. Osservazione. Il punto F, attesa questa proprietà insigne, chiamasi *Fuoco* della parabola. Si vede che situando in esso un corpo luminoso, sonoro, caldo, ec. dal quale emanino degli atomi che si suppongano riflettersi facendo l'angolo di riflessione uguale all' angolo d'incidenza; questi atomi, andando a battere nella parabola MAm si rifletteranno parallelamente al suo asse AZ.

333. COROLLARIO. La normale FK, abbassata dal fuoco sulla tangente, ha per espressione... $\frac{\sqrt{(4mx+m^2)}}{4}$. Imperciocchè $(FK)^2=(FM)^2-\frac{(TM)^2}{4}$ $=\left(x+\frac{m}{4}\right)^2-\left(\frac{mx+4xx}{4}\right)=xx+\frac{mx}{2}+\frac{m^2}{16}$ $-\frac{mx}{4}-xx=\frac{4mx+m^2}{16}$, e per conseguenza...

$$FK=\frac{\sqrt{(4mx+m^2)}}{4}.$$

Proprietà della parabola per rapporto a' suoi diametri.

334. Si chiama *diametro* della parabola ogni retta MH (Fig. 196.), guidata da un punto qualunque M, parallelamente al suo asse AZ. Le parti MN di questo diametro ne sono le ascisse; e le rette VN ovvero uN, guidate parallelamente alla tangente MT, che passa per l'origine M del diametro, ne sono le ordinate.

Si vede che la parabola non ha che un solo asse AZ, poichè il punto A è unico sopra il suo perimetro; ma essa ha un' infinità di diametri, poichè il numero de' punti M è infinito. Gli angoli delle coordinate di tutti questi diametri sono differenti.

Una linea quadrupla della retta MF guidata dall' origine M del diametro MH al fuoco, dicesi il parametro di questo diametro, come pure il quadruplo della retta AF è il parametro dell'asse AZ.

335. TEOREMA III. *Il quadrato dell' ordinata* VN *al diametro* MH, *è uguale al prodotto dell' ascissa corrispondente* MN, *nel parametro di que-*

sto diametro, *cioè a dire*, *si ha* $(VN)^2 = MN \times 4MF$.

Si conducano dai punti M e V le ordinate MP, VK, perpendicolari all' asse AZ.

Siano
- AP . . . . = x,
- PM . . . . = y,
- il parametro dell' asse AZ . . . = m,
- MN . . . . = u;
- VN . . . . = z;
- il parametro del diametro MH, ovvero 4 MF . . . . = q,
- la tangente MT . . . . = t.

Si avrà (329; 330; 331.), $PT = 2x$, $tt = mx + 4x^2 = 4x\left(x + \frac{m}{4}\right) = 4x \times MF = qx$.

I triangoli simili TPM, NHV danno . . . . . .

$$TM\,(t) : MP\,(y) :: VN\,(z) : VH = \frac{zy}{t},$$

$$TM\,(t) : PT\,(2x) :: VN\,(z) : NH = \frac{2xz}{t}.$$

Dunque $VK = MP + VH = y + \frac{zy}{t} = \frac{y(t+z)}{t}$; . . . .

$$AK = AP + MN + NH = x + u + \frac{2xz}{t}. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Ora $(VK)^2 = m \times AK$. Dunque si avrà $\frac{yy(t+z)^2}{tt}$ . . . $= m\left(x + u + \frac{2xz}{t}\right)$, ossia (mettendo in vece di yy il suo valore mx, e riducendo) $xzz = ttu$; ov-

vero (mettendo in vece di tt il suo valore qx, e riducendo), $zz = qu$.

336. COROLLARIO I. Paragonando l' equazione $zz = qu$, coll' equazione $yy = mx$, si vede che la parabola ha la medesima proprietà per rapporto ad un diametro qualunque, che per rapporto al suo asse. Le due ordinate NV, Nu, poste in versi contrarj, sono eguali, perchè le due radici dell' equazione $z = \pm\sqrt{qu}$ sono eguali, e non differiscono che nel solo segno.

337. COROLLARIO II. Se dal punto V si conduca la tangente Vt alla parabola, la quale incontri in t il diametro HM prolungato, la sottangente Nt, corrispondente all' ascissa MN, sarà doppia di questa ascissa. Ciò si dimostra, facendo uso della proprietà espressa dall' equazione $zz = qu$, come si è fatto uso (329.) della proprietà espressa dall' equazione $yy = mx$.

338. Teorema IV. *Due parabole qualunque* MAN, *man* (Fig. 197. e 198.) *sono sempre curve simili.*

Due curve simili in generale possono essere considerate come due poligoni simili d' un' infinità di lati. Quindi tutte le loro linee omologhe devono essere proporzionali. Il teorema sarà dunque dimostrato, se si farà vedere che prendendo le ascisse AP, *ap* nella ragione dei parametri, le ordinate MP, *mp* stanno ancora nella stessa ragione. Chiamiamo P e p i parametri delle due curve; AP, x; PM, y; *ap*, u; *pm*, z. Si avrà $yy = Px$, $zz = pu$.

Ora, per ipotesi, $x : u :: P : p$. Dunque $u = \frac{px}{P}$; sostituendo questo valore di u nell' equazione $zz = pu$, si avrà $zz = \frac{ppx}{P}$. Dunque $yy : zz :: P x :$

$\frac{pyx}{P}$ ::PP:pp ; e cavando le radici quadrate, y:z::P:p.

DELL' ELLISSE.

339. Il cono retto SGXEY (Fig. 199.) essendo supposto tagliato da un piano AMEM' perpendicolare al triangolo per l' asse SGE, e che incontri in A ed E i lati opposti SG, SE del cono: egli è evidente 1.° che la sezione risultante, ossia l'*ellisse* AMEM', è divisa in due parti uguali e simili dal suo asse AE; 2.° che essa ha una grandezza finita e determinata, come il suo asse AE.

340. TEOREMA I. *Se nell' ellisse* AMEM', *si conduca l' ordinata qualunque* PM *perpendicolare all' asse* AE, *il quadrato di questa ordinata starà al prodotto* AP×PE *delle ascisse o segmenti dell' asse, come il prodotto costante* AI×GE *delle linee parallele e date* AI, GE, *che terminano alle estremità dell' asse* AE, *sta al quadrato costante di questo asse; cioè a dire, si avrà* $(PM)^2 = AP \times PE \times \frac{AI \times GE}{(AE)^2}$.

Imperciocchè, facendo passare per l'ordinata PM, un piano parallelo alla base del cono, la curva KMHM', che è un cerchio, dà $(PM)^2 = KP \times PH$. Orá, a motivo de' due triangoli simili AGE, AKP, si ha $KP = \frac{AP \times GE}{AE}$; ed a motivo dei due triangoli simili AEI, PEH, si ha $PH = \frac{PE \times AI}{AE}$; dunque (mettendo in vece di KP e PH i loro valori) si avrà l' equazione che forma il risultato del teorema.

341. COROLLARIO I. Chiamando x l' ascissa AP; y l'ordinata PM; $2a$ l'asse AE; m, la quarta proporzionale alle tre linee date AE, AI, GE; si avrà $AP \times PE = x(2a-x) = 2ax - xx$; $\frac{AI \times GE}{AE} = m$;

e per conseguenza $yy = \frac{m}{2a}(2ax - xx)$, che è l'*equazione dell' ellisse*.

La linea m si chiama il parametro dell' asse AE.

342. COROLLARIO II. Supponiamo che il punto P cada nel punto C, mezzo di AE, che si chiama il *centro dell' ellisse*. Allora la doppia ordinata BD, che corrisponde a questo punto, si chiama il *secondo asse* dell' ellisse ovvero l'*asse minore*, comparativamente ad AE, che è l' asse maggiore. Il valore di BD si trova supponendo $x=a$, e cavando dall' equazione $yy = \frac{m}{2a}(2ax - xx)$, l' espressione di $2y$; questa espressione è $\sqrt{2am}$. Laonde si vede che il secondo asse BD è medio proporzionale geometrico fra l' asse maggiore AE ed il suo parametro.

Egli è chiaro che l' ellisse è divisa in due parti eguali e simili ABD, EBD dal secondo asse BD; perciocchè se si conducano dall' una e dall' altra parte del centro C, e ad uguali distanze da questo punto, delle ordinate all' asse AE, queste ordinate saranno eguali, poichè si ha sempre per yy lo stesso valore, sia che si faccia $x=a-k$, ovvero $x=a+k$.

Il secondo asse ha il suo parametro, come il primo. Questo parametro è una terza proporzionale al secondo asse ed al primo; di modo che nomi-

nando $2b$ il secondo asse BD: n, il suo parametro: si ha $n=\frac{2a\times 2a}{2b}=\frac{2aa}{b}$.

343. COROLLARIO III. Se, in vece di supporre $AP=x$ si supponga $CP=x$, ritenendo le medesime denominazioni per le altre linee: egli è evidente 1.° che a motivo di $AP\times PE=(AC-CP)\times(AC+CP)=aa-xx$, avremo $yy=\frac{m}{2a}\times(aa-xx)$, ovvero $yy=\frac{bb}{aa}\times(aa-xx)$, mettendo in vece di $\frac{m}{2a}$ il suo valore $\frac{bb}{aa}$ che risulta dall' equazione $2b=\sqrt{2am}$ che si è trovata nell' articolo precedente. L' equazione $yy=\frac{m}{2a}(aa-xx)$, ovvero $yy=\frac{bb}{aa}(aa-xx)$ esprime la proprietà fondamentale dell' ellisse riferita al suo asse maggiore, contando le ascisse su questo asse, dopo il centro della curva.

2.° Se nell' equazione $yy=\frac{bb}{aa}(aa-xx)$, noi mettiamo in vece di aa il suo valore $\frac{bn}{2}$, avremo $yy=\frac{2b}{n}\left(\frac{bn}{2}-xx\right)$; il che dà $xx=\frac{n}{2b}\times(bb-yy)$; ovvero $xx=\frac{aa}{bb}(bb-yy)$, mettendo in vece di $\frac{n}{2b}$

il suo valore $\frac{aa}{bb}$. Ora se dal punto M (Fig. 200.) tiriamo MQ perpendicolare a BD, egli è chiaro che $MQ=x$, $CQ=y$, $BQ\times QD=(CB)^2-(CQ)^2=bb-yy$. Quindi *il quadrato dell'ordinata* MQ *al secondo asse* BD *dell'elisse, sta al prodotto* BQ×QD *delle ascisse di questo asse, nel rapporto costante del parametro* n *di questo asse, a questo medesimo asse, o nel rapporto costante del quadrato della metà del primo asse al quadrato della metà del secondo*. La proprietà primitiva dell'elisse è dunque la medesima pel secondo asse come pel primo.

344. COROLLARIO IV. Di qui ne segue che *i quadrati delle ordinate all'uno o all'altro asse stanno tra loro come i prodotti delle ascisse corrispondenti*; poichè $\frac{m}{2a}$ ovvero $\frac{bb}{aa}$ essendo una quantità costante, le $(MP)^2$ seguono la ragione delle AP×PE, e che parimente $\frac{n}{2b}$ ovvero $\frac{aa}{bb}$ essendo una quantità costante, le $(MQ)^2$ seguono la ragione delle BQ×QD.

345. COROLLARIO V. La medesima proprietà, relativamente all'uno o all'altro asse, ci somministra la costruzione seguente, che stabilisco, solamente per lo primo asse, ma che ha egualmente luogo pel secondo. All'estremità E del primo asse AE [Fig. 201], innalzo la perpendicolare EK uguale al secondo asse, e tiro KA; sopra AE, come diametro, descrivo un semicircolo ATE: ed avendo condotto al diametro AE un' infinità di ordinate perpendicolari NP, porto PN da A in O; dal punto O, innalzo OH perpendicolare ad AE; dal punto H, conduco HM parallela ad AE: e dico che il punto M, situato sopra PN, apparterrà al-

l'ellisse. Imperciocchè, per la proprietà del circolo, $(PN)^2=AP\times PE$; ma a motivo dei triangoli simili AEK, AOH, si ha $(OH)^2$, ossia $(PM)^2=(AO)^2\cdot$

$$\times\frac{(EK)^2}{(AE)^2}=(PN)^2\times\frac{(EK)^2}{(AE)^2}=AP\times PE\times\frac{(EK)^2}{(AE)^2}\ldots$$

$=AP\times PE\times\dfrac{(CD)^2}{(AC)^2}$: che è l'equazione dell'ellisse riferita all'asse AE.

346. PROBLEMA I. *Trovare l'espressione della sottangente PT [Fig. 202] nell'ellisse.*

Conduciamo, dal punto M, la secante OMN, e la retta MH parallela all'asse AE, e terminata dall'ordinata NV.

$$\text{Supponiamo}\left\{\begin{array}{l} AE \ldots\ldots\ldots\ldots =2a,\\ BD \ldots\ldots\ldots\ldots =2b,\\ CP \ldots\ldots\ldots\ldots =x,\\ PM \ldots\ldots\ldots\ldots =y,\\ MH \ldots\ldots\ldots\ldots =z,\\ NH \ldots\ldots\ldots\ldots =u,\\ PO \ldots\ldots\ldots\ldots =s,\end{array}\right.$$

I triangoli simili OPM, MHN, danno OP $[s]$: PM $[y]$ :: MH $[z]$: NH $[u]=\dfrac{zy}{s}$. Ora si ha $yy=\dfrac{bb}{aa}(aa-xx)$, ed $(y+u)^2=\dfrac{bb}{aa}[aa-[x-z^2]]$, ovvero $yy+2yu+uu=\dfrac{bb}{aa}[aa-xx+2xz-zz]$. Sottraendo la prima di queste equazioni dalla seconda, avremo $2uy+uu=\dfrac{bb}{aa}[2xz-zz]$. Sostituendo in quest'ultima equazione, in vece di u, il suo va-

lore $\frac{zy}{s}$, si troverà $\frac{2zyy}{s}+\frac{zzyy}{ss}=\frac{bb}{aa}[2xz-zz]$, ovvero $\frac{2yy}{s}+\frac{zyy}{ss}=\frac{bb}{aa}[2x-z]$;

Supponiamo ora che z diventi zero: PO diverrà la sottangente PT, e l'equazione precedente si ridurrà a questa $\frac{2yy}{s}=\frac{2bbx}{aa}$; d'onde si ricava s $=\frac{aayy}{bbx}=\frac{aa-xx}{x}=\frac{[a-x][a+x]}{x}=\frac{AP\times PE}{CP}$.

Laonde si vede che la sottangente è quarta proporzionale all'ascissa CP, ed alle due parti AP, PE dell'asse DE.

347. COROLLARIO. Si vede, come per la parabola, che conoscendo l'ascissa AP o CP, si conoscerà la sottangente PT, la tangente TM, la normale RM, la sottonormale PR.

Il valore di CT, di cui avremo bisogno, cioè a dire, della distanza del centro dell'ellisse dal punto di concorso della tangente coll'asse prolungato, è $\frac{aa}{x}$, poichè CT=CP+PT=$x+\frac{aa-xx}{x}$, che si riduce ad $\frac{aa}{x}$.

Tutte queste proprietà dell'ellisse, relativamente all'asse AE, hanno egualmente luogo relativamente all'asse BD.

348. TEOREMA II. *Se da una estremità B (Fig. 203) dell'asse minore dell'ellisse, come centro, con un raggio eguale alla metà AC dell'asse maggiore, si descriva un arco di circolo che incontri questo asse nei punti F ed f; ed in seguito da un punto qualunque M della curva, si tirino*

ai punti F ed f le rette MF ed Mf, la somma di queste due linee, cioè a dire, MF+Mf, sarà costantemente eguale all' asse maggiore AE.

Guidiamo l' ordinata MP; e supponiamo $AE = 2a$, $BD = 2b$, $CF = c = \sqrt{(aa - bb)}$, $CP = x$, $PM = y$. Il valore di FP sarà $c - x$; e sarebbe $x - c$, se il punto P cadesse fra i punti A ed F. Nell' uno e nell' altro caso, si avrà $[FP]^2 = cc - 2cx + xx$. Dunque $[FM]^2 = [FP]^2 + [PM]^2 = cc - 2cx + xx$

$$+ yy = cc - 2cx + xx + \frac{b^2}{a^2}[aa - xx] \ldots\ldots$$

$$= \frac{aacc - 2aacx + aaxx + aabb - bbxx}{aa} \ldots\ldots$$

$$= \frac{a^4 - 2aacx + ccxx}{aa},$$ mettendo in vece di bb il suo valore $aa - cc$. Dunque $FM = \frac{aa - cx}{a}$. Si troverà similmente $fM = \frac{aa + cx}{a}$. Dunque $FM + fM$

$$= \frac{aa - cx + aa + cx}{a} = 2a.$$

349. Osservazione. Di qui ne segue un modo semplicissimo di descrivere l' ellisse con un moto continuo. Prendete un filo la cui lunghezza sia eguale all' asse maggiore AE; fissate le sue estremità nei punti dati F ed *f*; in seguito tendete questo filo col mezzo d' uno stile M che farete girare intorno ai due punti F, ed *f*, finchè sia ritornato al punto d' onde è partito: la curva che descriverà questo stile, è un' ellisse.

L' ellisse descritta in questo modo, è quella che chiamasi l' *ovale del Giardiniere*.

Se l' asse minore BD è dato, come pure l' asse-

maggiore AE, bisogna prendere la distanza Ff dai due punti fissi F ed f, uguale al doppio di $\sqrt{[AC]^2-[CB]^2}$.

I due punti F ed f si chiamano i *fuochi* dell'ellisse.

350. TEOREMA III. *Gli angoli FMT, fMK* (Fig. 204), *formati dalla retta indefinita TMK, che tocca l'ellisse nel punto M, e dalle rette MF, Mf, guidate da questo punto ai due fuochi F, ed f, sono eguali tra loro.*

Conducete l'ordinata MP all'asse AE; e dai due fuochi, le perpendicolari FO, fK, sulla tangente. Chiamando AC, a; CB, b; CF o Cf, c; CP, x: si avrà [347] $CT=\frac{aa}{x}$; e per conseguenza $TF=CT-CF=\frac{aa}{x}-c=\frac{aa-cx}{x}$; $Tf=TC+Cf=\frac{aa}{x}+c=\frac{aa+cx}{x}$. Dunque $TF : Tf :: \frac{aa-cx}{x} : \frac{aa+cx}{x} :: aa-cx : aa+cx$. Da un altro canto; avendo trovato [348] $FM=\frac{aa-cx}{a}$, $fM=\frac{aa+cx}{a}$; si ha $FM : fM :: \frac{aa-cx}{a} : \frac{aa+cx}{a} :: aa-cx : aa+cx$. Quindi si avrà $TF : Tf :: FM : fM$. Ma a motivo dei triangoli simili TFO, TfK; si ha $TF : Tf :: FO : fK$. Dunque $FM : fM :: FO : fK$; ed $[FM]^2 : [fM]^2 :: [FO]^2 : [fK]^2$; il che dà (Alg. 127) $[FM]^2 : [fM]^2 :: [FM]^2-[FO]^2 : [fM]^2-[fK]^2 :: [MO]^2 : [MK]^2$. Dunque $FM : fM :: MO : MK :: FO : fK$. Quindi i due triangoli rettangoli FOM, fKM hanno i lati proporzionali, e sono per conseguenza simili. Dunque l'angolo FMT = all'angolo fMK.

351. Osservazione. Di qui si vede che se un

atomo partendo da uno F dei fuochi, vada a battere in un punto qualunque M dell' ellisse, e si rifletta sotto un angolo eguale a quello d' incidenza, andrà a passare per l'altro fuoco. Ciò ha fatto dare il nome di *fuochi* ai due punti F ed *f*, che hanno questa proprietà.

Proprietà dell' ellisse per rapporto a' suoi diametri.

352. Si chiama *diametro* dell' ellisse [Fig. 205] ogni retta MK che passa pel suo centro C, e termina, dall' una e dall' altra parte, alla sua circonferenza.

Egli è evidente che ciascun diametro MK è diviso in due parti eguali al centro C; perciocchè le quattro parti dell' ellisse AB, BE, ED, DA essendo perfettamente eguali tra loro, se si colloca il quarto ED sopra il quarto AB, di modo che CE cada sopra CA, egli è chiaro che CD cadrà sopra CB, e che l'arco ED coprirà esattamente l' arco AB. Inoltre, l' angolo ECK essendo uguale all' angolo ACM, avrà CK la stessa direzione di CM, ed il punto K si confonderà col punto M, il che dà CK=CM.

Si vede ancora che ogni diametro divide l'ellisse in due porzioni eguali, ma poste in parti contrarie.

353. Se da una delle estremità M d' un diametro MK, si conduca una tangente all' ellisse: il diametro LR parallelo a questa tangente, chiamasi *diametro conjugato* al diametro MK.

Le rette VN, o *u*N, condotte da tutti i punti della circonferenza dell' ellisse ad un diametro MK, parallelamente alla tangente che passa per l' una o l' altra estremità di questo diametro, si chiamano *ordinate* a questo diametro medesimo.

Dico *l' una e l' altra estremità:* perciocchè essendo uguali i due archi ellittici AM, EK, egli è chiaro che le due tangenti MT, KZ sono parallele, e di più eguali.

Una terza proporzionale ad un diametro ed al suo conjugato, è il *parametro* del primo di questi diametri.

554. TEOREMA IV. *Se dalle estremità M ed L d' un diametro MH e del suo conjugato LR, si conducano le due ordinate MP, LQ, all' asse AE: la parte dell' asse compresa fra il centro ed una delle ordinate, sarà media proporzionale fra i due segmenti del medesimo asse, determinati dall' altra ordinata: cioè a dire, che CQ sarà media proporzionale tra AP e PE, e CP media proporzionale fra EQ e QA.*

Si conduca la tangente MT; chiamiamo AC, a; CB, b; CP, x; CQ, z. Si avrà per ciò ch' è stato dimostrato, $PL = \frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$; $LQ = \frac{b}{a}\sqrt{(aa-zz)}$; $PT = \frac{aa-xx}{x}$. I triangoli simili TPM, CQL, danno $\frac{TF}{PM} = \frac{CQ}{QL}$, ovvero. . . $\frac{\sqrt{(aa-xx)}}{x} = \frac{z}{\sqrt{(aa-xx)}}$, donde si ricava $zz = aa-xx$, ovvero $xx = aa-zz$. Quindi, si ha $(CQ)^2 = (CA)^2-(CP)^2 = AP \times PE$, e $(CP)^2 = (CE)^2-(CQ)^2 = EQ \times QA$.

355. TEOREMA V. *Se all' estremità L* (Fig. 206) *del diametro LR conjugato al diametro MK, si guidi la tangente ILII all' ellisse; questa tangente sarà parallela al diametro MK.*

Siano PT, QI, le sottangenti che corrispondo-

no rispettivamente alle ordinate MP, LQ, guidata dai punti M ed L all' asse AE. Ritenendo le denominazioni dell' articolo precedente, avremo PM $= \frac{b}{a} \sqrt{(aa-xx)}$; QL$= \frac{b}{a} \times \sqrt{(aa-zz)} = \frac{bx}{a}$, mettendo in vece di $\sqrt{(aa-zz)}$ il suo valore x; PT$= \frac{aa-xx}{x}$; QI$= \frac{aa-zz}{z} = \frac{xx}{\sqrt{(aa-xx)}}$

Dunque QI : QL :: $\frac{xx}{\sqrt{(aa-xx)}} : \frac{bx}{a}$ :: x $\frac{b}{a} \sqrt{(aa-xx)}$ :: CP : PM. Dunque i due triangoli rettangoli IQL, CPM sono simili; e per conseguenza IL è parallela a CM ovvero a KM.

356. COROLLARIO. Dunque, se un diametro è parallelo alla tangente guidata da una delle estremità d' un altro diametro, questo secondo diametro sarà altresì parallelo alla tangente guidata da una delle estremità del primo. Quindi questi due diametri sono reciprocamente conjugati l' uno all' altro.

Siccome le tangenti OK, OR, condotte, dalle altre due estremità K ed R de' nostri due diametri conjugati, sono altresì reciprocamente parallele a questi diametri; si vede che il quadrilatero VHZO, che ha per lati le quattro tangenti guidate dalle estremità di due diametri conjugati, è un parallelogrammo. Esso è composto dai quattro parallelogrammi eguali, CLHM, CLVK, CRZM, CROK.

357. TEOREMA VI. *Il quadrato d' un' ordinata qualunque VN* (Fig. 207) *al diametro MK d' un' ellisse sta al prodotto MN×NK delle parti di questo diametro, come il quadrato del semidia-*

metro conjugato CL, al quadrato del semidiametro cM, o come il parametro del diametro MK al diametro medesimo.

Dai punti M, L, V si conducano all'asse le ordinate perpendicolari MP, LQ VS; e dal punto N, NZ perpendicolare a VS, ed NY perpendicolare a CA.

Supponiamo
- AC . . . . $= a$,
- CB . . . . $= b$,
- CP . . . . $= x$,
- CM . . . . $= f$,
- CL . . . . $= g$,
- CN . . . . $= s$,
- VN . . . . $= t$,
- CQ . . . . $= z$,
- Il parametro del diametro MK $= h$.

Si avrà (354) $zz = aa - xx$, e per conseguenza $PM = \frac{bz}{a}$, $QL = \frac{bx}{a}$.

I triangoli simili CPM, CYN danno

$$CM\ (f) : PM\ \left(\frac{bz}{a}\right) :: CN\ (s) : NY = \frac{bsz}{af},$$

$$CM\ (f) : CP\ (x) :: CN\ (s) : CY = \frac{sx}{f}.$$

I triangoli simili CQL, NZV danno

$$CL\ (g) : CQ\ (z) :: VN\ (t)\ NZ = \frac{tz}{g}.$$

$$CL\ (g) : LQ\ \left(\frac{bx}{a}\right) :: VN\ (t) : VZ = \frac{btx}{ag}.$$

Dunque $VS=VZ+ZS=VZ+NY=\frac{btx}{ag}+\frac{bsz}{af}$;

$CS=NZ-CY=\frac{tz}{g}-\frac{sx}{f}$. Ora (343) $(VS)^2=\frac{(CB)^2}{(CA)^2}\times[[CA]^2-[CS]^2]$. Dunque, mettendo in vece delle linee i loro valori analitici, e cancellando i termini che si distruggono, si avrà . . . .

$\frac{b^2t^2x^2}{g^2}+\frac{b^2s^2z^2}{f^2}=a^2b^2-\frac{b^2t^2z^2}{g^2}-\frac{b^2s^2x^2}{f^2}$; ovvero [mettendo in vece di x^2 il suo valore a^2-z^2, e riducendo] $t^2=\frac{g^2}{f^2}[f^2-s^2]$: equazione da cui si ricava 1.° $t^2:f^2-s^2::g^2:f^2$, cioè a dire, $[VN]^2:MN\times NK::[CL]^2:[CM]^2$.

2.° $t^2:f^2-s^2::k:2f$; perchè essendo k [353] una terza proporzionale a $2f$ ed a $2g$, si ha . . .

$\frac{k}{2f}=\frac{g^2}{f^2}$. Questa proporzione è la medesima cosa di questa $(VN)^2:MN\times NK::k:MK$.

358. COROLLARIO I. Paragonando le equazioni $t^2=\frac{k}{2f}(f^2-s^2)$, $t^2=\frac{g^2}{f^2}(f^2-s^2)$, con quelle che si sono trovate (343) pei due assi, si vede che relativamente ai rapporti che esistono fra i quadrati delle ordinate, ed i prodotti corrispondenti delle ascisse; le proprietà dell'ellisse sono le medesime per due diametri conjugati qualunque, come pei due assi.

359. COROLLARIO II. Se dal punto V si conduca all'ellisse la tangente Vt, che incontri in t il diametro KM prolungato; si troverà, facendo uso della proprietà dei diametri, come si è fatto uso

(346 e 347) della proprietà per gli assi, che la sottangente Nt ha per valore $\frac{f^2-s^2}{s}$, e che la retta Ct, compresa fra il centro ed il punto t, ha per valore $\frac{f^2}{s}$.

360. TEOREMA VII. *La somma dei quadrati di due diametri conjugati qualunque, è uguale alla somma dei quadrati degli assi: ovvero, ciò che torna alla stessa cosa, la somma dei quadrati de' due semidiametri conjugati* CM, CL (Fig. 205) *è uguale alla somma dei quadrati de' due semiassi* CA, CB.

Avendo condotte le ordinate MP, LQ, perpendicolari all' asse AE, e chiamando AC, a; CB, b; CP, x: avremo $(PM)^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$; ... $(CM)^2=(CP)^2+(PM)^2=x^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$; ... $[CQ]^2=a^2-x^2$; $[QL]^2=\frac{b^2x^2}{a^2}$, $[CL]^2=[CQ]^2+[QL]^2=a^2-x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}$. Dunque $[CM]^2+[CL]^2=x^2+\frac{b^2}{a^2}[a^2-x^2]+a^2-x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}=bb+aa$.

361. TEOREMA VIII. *Il parallelogrammo fatto intorno a due diametri conjugati, è uguale al rettangolo fatto intorno ai due assi; ovvero, ciò che torna allo stesso, il parallelogrammo* CLHM [Fig. 206] *fatto intorno ai due semidiametri conjugati* CM, CL, *è uguale al rettangolo* CAXB, *fatto intorno ai due semiassi* CA, CB.

Si conducano, all' asse AE, le ordinate perpen-

dicolari MP, LQ; e dal punto L, la retta L y, parallela a CA. I due parallelogrammi CLYT, CLHM, che hanno la medesima base CL, e sono compresi fra le medesime parallele CL, TH, hanno superficie uguali [140]. Ora la superficie del parallelogrammo $CLYT = CT \times LQ = \frac{aa}{x} \times \frac{bx}{a} = ab$. ritenendo sempre le medesime denominazioni, e mettendo in vece di CT il suo valore $\frac{aa}{x}$ [347], ed in vece di LQ il suo valore $\frac{bx}{a}$ [355]. Ma ab è il valore del rettangolo CAXB; dunque il parallelogrammo CLHM è uguale al rettangolo CAXB.

362. TEOREMA IX. *Se dall'estremità* M [Fig. 208] *d'un diametro* MK, *si conduca ad uno* f *dei fuochi la retta* Mf *che incontri in* Z *il diametro conjugato* LR : *la parte* MZ *di questa linea sarà costantemente uguale alla metà* CA *dell' asse maggiore.*

Si conduca la tangente MT, e l'ordinata MP perpendicolare all'asse AE. Chiamando sempre AC, a; CB, b; CP, x: si avrà (347) $CT = \frac{aa}{x}$; (350) $Tf = \frac{aa+cx}{x}$; (348) $Mf = \frac{aa+cx}{a}$.

Ciò posto, per le parallele MT, LC, si ha $Tf \left(\frac{aa+cx}{x}\right) : Mf \left(\frac{aa+cx}{a}\right) :: TC \left(\frac{aa}{x}\right) : MZ = a$.

363. PROBLEMA II. *Conoscendo di grandezza e di posizione due diametri conjugati* MK, LR, (Fig. 209), *determinare gli assi* AE, BD *dell' ellisse.*

Chiamiamo CA a; CB b; CM, f; CL, g, il

seno tutto, 1; il seno dell' angolo LCM, o dell'angolo LCS, n. La perpendicolare LS, abbassata dall'estremità L del diametro LR sul diametro MK, avrà per espressione $\frac{ng}{1}$, ossia ng.

Ciò posto, si hanno (360 e 361) queste due equazioni $aa+bb=ff+gg$, $ab=nfg$. Dunque $aa+bb+2ab=ff+gg+2nfg$, ed $aa+bb-2ab=ff+gg-2nfg$; e cavando le radici quadrate,

$$a+b=\sqrt{(ff+gg+2nfg)}$$
$$a-b=\sqrt{(ff+gg-2nfg)}.$$

Aggiungendo insieme queste due equazioni, poi sottraendo la seconda dalla prima, si troverà, . . .

$$2a=\sqrt{(ff+gg+2nfg)}+\sqrt{(ff+gg-2nfg)},$$
$$2b=\sqrt{(ff+gg+2nfg)}-\sqrt{(ff+gg-2nfg)}.$$

Quindi i due assi sono noti di grandezza. Determino le loro espressioni lineari, e la loro posizione con questa costruzione.

Prolungate SL della quantità LG=CM. e tirate GC: questa linea sarà il valore del primo radicale, poichè si ha [169] $[GC]^2=[GL]^2+[LC]^2+2GL\times LS=ff+gg+2f\times ng$. Prendete LS$g$=CM, e tirate C$g$: questa linea sarà il valore del secondo radicale; poichè si ha (med. artic.) $(Cg)^2=(CL)^2+(LG)^2-2Lg\times LS=gd+ff-2f\times ng$. Dunque, se dal punto C, come centro, col raggio Cg, si descriva un circolo pgh, che incontri in p ed h la retta GC, la retta Gp sarà eguale all' asse maggiore dell'ellisse, e la retta Gh uguale all' asse minore.

Dividete Gp in due parti eguali al punto q; sopra Gq, come diametro, descrivete un semicircolo Grq; iscrivete in questo semicircolo la corda Gr,

uguale alla metà di Gh; e tirate l'altra corda rq. Questa seconda corda sarà uguale alla distanza del centro dell'ellisse da uno dei fuochi, poichè il triangolo rettangolo Grq dà $(rq)^2=(Gq)^2-(Gr)^2$, che è l'espressione del quadrato della distanza di cui ho parlato.

Adesso, per determinare la posizione degli assi, dal punto M, come centro, con un raggio eguale a Gq o a $\frac{Gp}{2}$, descrivete un arco di circolo, che tagli CL nel punto Z; tirate la retta MZf indefinita: il fuoco, opposto al punto M, deve trovarsi su questa linea (362). Dal centro C, con un raggio eguale ad rq, descrivete un arco di circolo, che tagli MZf nel punto f: questo punto f è il fuoco di cui si tratta. Quindi se dai punti C ed f si tiri una linea retta AE, l'asse maggiore dell'ellisse cadrà su questa linea; e se dal centro C s'innalzi BD perpendicolare ad AE, l'asse minore cadrà sopra questa linea BD. Le estremità di questi assi si determineranno col fare ciascuna delle linee, CA, CE uguale a Gq, e ciascuna delle linee CB, CD uguale a Gr.

364. TEOREMA X. *Due ellissi ABED, abed (Fig. 210 e 211) sono simili, allorchè i loro assi o semiassi omologhi sono proporzionali; cioè a dire, quando si ha AE : ae : : BD: bd, ovvero AC : ac : : CB : cb.*

La proposizione sarà dimostrata, se si fa vedere che prendendo le ascisse AP, ap nella ragione degli assi AE, ae, ovvero dai semiassi AC, ac, le ordinate PM, pm stanno ancora nella stessa ragione. Ora, dalla proporzione supposta AP : ap : : AE : ae; si ricava, *dividendo* (Alg. 127), PE : pe : : AE : ae; dunque moltiplicando queste due proporzioni, termine per termine, si avrà AP×PE : ap×pe : :

$(AE)^2 : (ae)^2$. Ma da un altro canto (343) si ha $(PM)^2 : AP \times PE :: (CB)^2 : (CA)^2 :: (BD)^2 : (AE)^2 :: (bd)^2 : (ae)^2 :: (pm)^2 : ap \times pe$; dunque $(PM)^2 : AP \times PE :: (pm)^2 : ap \times pe$; ovvero, *alternando*, $(PM)^2 : (pm)^2 :: AP \times PE : ap \times pe :: (AE)^2 : (ae)^2 :: (AC)^2 : (ac)^2$; il che dà (Algeb. 132) $PM : pm :: AE : ae :: AC : ac$.

DELL' IPERBOLA.

365. Siano (Fig. 212) due coni retti SCLDF, *Scldf*, opposti al vertice; dal punto A dato sul lato SC, conduciamo al punto E dato sul prolungamento del lato opposto DS, la retta AE, che prolungheremo indefinitamente dall' una e dall' altra parte; facciamo passare per questa linea, e perpendicolarmente al piano dei triangoli per l' asse SCD, *Scd*, un piano che tagli i coni opposti e formi sopra le loro superficie le curve LAF, *lEf*: queste curve si chiamano *iperbole opposte*. Qualche volta si comprendono l' una e l' altra sotto il nome generale d' *iperbola*, perchè difatti sono rappresentate ad un tempo dalla medesima equazione, come lo vedremo; qualche volta si chiama semplicemente *iperbola* una di esse in particolare. Si vedrà che esse sono perfettamente uguali l' una all' altra.

I punti A ed E si chiamano *vertici* dell' iperbola, o delle iperbole opposte.

Egli è chiaro che ciascuna delle due iperbole opposte è divisa in due parti eguali dal suo asse AZ o E*z*; e che esse si estendono dall' una e dall' altra parte all' infinito, come i loro assi.

366. TEOREMA I. *Se nell' iperbola LAF, si conduca l' ordinata qualunque PM perpendicolare all' asse AZ, il quadrato di questa ordinata starà al prodotto AP×PE, delle distanze del punto*

P dai due vertici della curva, come il prodotto costante $CG \times GD$ *dei segmenti del diametro* CD, *sta al prodotto costante* $GA \times GE$ *delle distanze del punto G dai vertici della curva; cioè a dire, si avrà* $(PM)^2 = AP \times PE \times \frac{CG \times GD}{AG \times EG}$.

Imperciocchè, se si fa passare per l'ordinata PM, il piano $KMHM'$ parallelo alle basi dei coni, si avrà $(PM)^2 = KP \times PH$. Ora, (a motivo dei triangoli simili AGC, APK) $PK = AP \times \frac{CG}{AG}$; ed a motivo dei triangoli simili EGD EPH), $PH = EP \times \frac{GD}{EG}$. Dunque $(PM)^2 = AP \times EP \times \frac{CG \times GD}{AG \times EG}$.

567. COROLLARIO I. Siccome è in nostro arbitrio di segare ciascun cono a quella distanza che vogliamo dal vertice S, possiamo supporre che la retta AG sia uguale ad AE; ed allora, chiamando x l'ascissa AP; y, l'ordinata PM; $2a$; la retta data AE; m, la quarta proporzionale alle tre linee date EG, CG, GD, si avrà $yy = \frac{m}{2a}(2ax + xx)$ che è l'*equazione dell'iperbola.*

568. COROLLARIO II. Si scorge da questa equazione che a ciascuna x positiva corrisponderanno sempre due ordinate uguali, una PM, positiva, l'altra PM' negativa; ed a misura che aumenterà x, queste ordinate aumenteranno: di modo che se x diventa infinita, esse pure diventeranno infinite. Laonde ne segue che la curva ha due rami AL, AF, eguali, e simili, che si estendono all'infinito, uno sopra l'asse AZ delle ascisse, l'altro al di sotto; il che abbiamo già veduto immediatamente dalla generazione dell'iperbola.

Facciamo ora x negativa. Finchè $-x$ sarà mi-

nore di $2a$, il valore di y sarà immaginario. Ma se si fa $-x = 2a = AE$, si avrà $y = 0$. Dunque l'estremità E della retta AE è un punto della curva. Dando sempre $x - x$ dei valori maggiori di $2a$, si troveranno dalla parte delle x negative, due nuovi rami infiniti Ef, El, uguali e simili, uno al di sopra, l'altro al di sotto dell'asse delle ascisse. Inoltre, questi due rami sono perfettamente uguali ai due primi AL, AF. Imperciocchè se suppongasi primieramente $x=h$, ed in seguito si prenda $-x = 2a+h$, che renderà evidentemente le rette AP, EQ eguali tra loro; si troverà nell'uno e nell' altro caso $y = \pm\sqrt{\left(\frac{m}{2a}[2ah+hh]\right)}$. Dunque le quattro linee PM, PM', QN, QN' sono eguali tra loro. Quindi la curva intera è composta di quattro rami infiniti, uguali e simili, AL', AF, Ef, El.

Se le due linee rappresentate da m e $2a$, fossero eguali, ovvero se si avesse $yy = 2ax + xx$, l' iperbola sarebbe *equilatera*: specie d' iperbola, che è per riguardo all' iperbola ordinaria, ciò che è il cerchio per riguardo all' ellisse in generale.

369. Osservazione. Si chiama la retta AE [$2a$] il *primo asse* dell' iperbola; la linea m, il *parametro* di questo asse.

Se dal punto C, mezzo di AE [Fig. 213], e che chiamasi il *centro* dell' iperbola, s' innalzi la perpendicolare BD, che abbia le parti CB, CD eguali, e che sia media proporzionale fra $2a$ ed m; questa retta BD si chiama il secondo asse dell' iperbola. Quindi, nominando BD, $2b$, si ha $2a:2b::2b:m$; e per conseguenza $bb = \frac{am}{2}$, ossia $\frac{bb}{aa} = \frac{m}{2a}$.

Il secondo asse ha il suo parametro, come il primo asse. Questo parametro, è una terza proporzio-

nale al secondo asse, ed al primo; di modo che chiamandolo n, si ha $2b : 2a :: 2a : n$; e per conseguenza $aa = \frac{bn}{2}$, ossia $\frac{aa}{bb} = \frac{n}{2b}$.

370. COROLLARIO III. Contando le ascisse dal centro C, cioè a dire, supponendo $CP = x$, e ritenendo d' altronde le altre denominazioni: egli è chiaro che si avrà $AP \times PE = (CP - AC) \times (CP + AC) = (x - a).(x + a) = xx - aa$, e per conseguenza yy $\frac{m}{2a}(xx - aa)$ ovvero (mettendo in vece di $\frac{m}{2a}$ il suo volore $\frac{bb}{aa}$, che risulta dall' articolo precedente), $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$.

371. COROLLARIO IV. *I quadrati delle ordinate PM stanno fra loro, come i prodotti corrispondenti $AP \times PE$ delle ascisse*; poichè $\frac{m}{2a}$ o $\frac{bb}{aa}$ è una quantità costante.

372. COROLLARIO. V. L' equazione $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$ dà $xx = \frac{aa}{bb}(yy + bb)$, ovvero $xx = \frac{n}{2b}(yy + bb)$ mettendo in vece di $\frac{aa}{bb}$ il suo valore $\frac{n}{2b}$. Il che ci fa vedere che, *se da un punto M dell' iperbola, si guida al secondo asse BD prolungato, se è necessario, la perpendicolare e or-*

dinata MH; il quadrato di questa ordinata sta alla somma dei quadrati del semiasse secondario, e dell' ascissa CH, presa sopra il secondo asse, come il quadrato della metà del primo asse, sta al quadrato della metà del secondo, o come il parametro del secondo asse sta a questo asse medesimo. Quindi la proprietà dell' iperbola, per rapporto al secondo asse, non è in tutto la stessa come per rapporto al primo asse.

373. COROLLARIO VI. L' iperbola si può costruire così. Sopra EP, come diametro (Fig. 214), descrivete un semicircolo EVP; alzate, perpendicolarmente ad AE la retta AV che incontri la semicirconferenza nel punto V, e tirate la corda PV. In seguito, avendo condotta dalle estremità A e B dei due assi, la retta indefinita AY, portate la corda PV, sopra AE, da A in X; dal punto X alzate la perpendicolare XY che incontri in Y la retta ABY; fate l' ordinata PM =XY: il punto M sarà uno di quelli dell' iperbola. Imperciocchè per la costruzione e per la proprietà del cerchio, si ha $(PV)^2=AP\times PE$; ed a motivo dei triangoli simili ACB, AXY, si ha XY o $PM=AX\times\frac{CB}{AC}$.

374. PROBLEMA I. *Trovare l' espressione della sottangente PT* (Fig. 213.), *che corrisponda alla tangente MT ed all' ordinata MP.*

Adoprando l' equazione caratteristica dell' iperbola, $(PM)^2=\frac{(CB)^2}{(CA)^2}\times((CP)^2-(CA)^2)$ esattamente nella stessa maniera che si è adoprata (346) l' equazione analoga dell' ellisse, si troverà $PT=\frac{xx-aa}{x}=\frac{AP\times PE}{CP}$. Quindi la sottangente PT

è quarta proporzionale all' ascissa CP ed alle parti AP, PE dell' asse.

375. COROLLARIO. Conoscendo CP, si conoscerà l' ordinata PM, la sottangente PT, la tangente TM, la normale RM, la sottonormale PR.

La distanza del centro C dal punto T, ove la tangente taglia il primo asse, cioè a dire CT vale $\frac{aa}{x}$ poichè $CT=CP-PT=x-\frac{(xx-aa)}{x}=\frac{aa}{x}$. E la parte $AT=AC-CT=a-\frac{aa}{x}=\frac{ax-aa}{x}$.

376. Osservazione. Si vede, dall' espressione della parte CT dell' asse, compresa fra il centro C e l' origine di ciascuna sottangente, per la curva iperbolica MAM′, che questa parte diminuisce continuamente, a misura che x aumenta. Allorchè x diventa infinita, CT diventa zero, perchè una frazione il cui denominatore diventa infinito, rimanendo finito il numeratore, è infinitamente piccola, e può essere riputata zero.

Quindi tutte le tangenti alla curva iperbolica MAM′ partono necessariamente da qualche punto situato sopra CA. E similmente tutte le tangenti all' iperbola opposta NEN′, partono da qualche punto di CE.

Fra queste tangenti, quelle CV, CS, C*u*, C*s* (Fig. 215), che partendo dal centro C, vanno a toccare all' infinito, o possono essere supposte andare a toccare all' infinito, le iperbole opposte, si chiamano gli *asintoti* di queste iperbole. Questi quattro asintoti non formano se non due linee rette, perchè CV e C*u* sono in linea retta, come CS e C*s*.

L' iperbola ha, per rapporto a' suoi asintoti, molte proprietà, di cui ecco le principali.

377. TEOREMA II. *Gli asintoti CV, CS sono paralleli alle rette AD, AB, tirate dal vertice A dell' perbola alle estremità D, e B, del secondo asse BD.*

Dal punto A, innalzate sopra AE la perpendicolare AX che incontri in X l' asintoto CV. Egli è chiaro che il triangolo rettangolo CAX sarà simile al triangolo rettangolo, che avesse per lato l' ascissa contata dal centro C, che corrisponde al punto infinitamente lontano ove l' asintoto va a toccare l' iperbola, l' ordinata corrispondente, e l' asintoto. Quindi, si avrà CA : AX :: x : . . . . $\frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{a}$. Ma essendo x infinita, aa è nullo per rapporto ad xx; e per conseguenza $\frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{a}$ si riduce a $\frac{bx}{a}$. Dunque CA : AX :: x : $\frac{bx}{a}$ :: a : b :: CA : CD. Dunque AX=CD; e per conseguenza CX o CV è parallela ad AD. Si dimostrerà nella stessa maniera che CS è parallela ad AB.

378. COROLLARIO I. Dunque l' asintoto CV divide la retta BA, in modo che le tre linee AH, HC, HB sono eguali tra loro. Imperciocchè 1.° essendo CV parallela ad AD, l' angolo HCA=all' angolo CAD=all' angolo CAB. Dunque il triangolo HAC è isoscele, e per conseguenza AH=CH. 2.° L' angolo BCH=all' angolo CDA=all' angolo CBH. Dunque il triangolo HBC è isoscele, e per conseguenza HC=HB. Quindi le tre linee AH, HC, HB sono eguali.

379. COROLLARIO. II. Se CB è minore di CA, l' angolo VCS, formato dagli asintoti, sarà acuto; se CB>CA, quest' angolo sarà ottuso; e se CB=

CA, o, ciò che torna allo stesso, se l' iperbola è equilatera, l' angolo in questione sarà retto.

380. TEOREMA III. *Se si conduca perpendicolarmente all' asse EAP la retta RMr, che termini dall' una e dall' altra parte agli asintoti, e che incontri l' asse in P, e l' iperbola ne' punti M ed M'; il prodotto RM×Mr, ossia M'r×M'R, sarà sempre eguale al quadrato della metà del secondo asse CB.*

Siano CA=a, CB=b, CP=x, PM=y. I triangoli simili ACB, CPR danno CA (a) : CB (b) :: CP (x) : PR $= \frac{bx}{a}$. Dunque RM=PR—PM=$\frac{bx}{a}$ —y; ed Mr=PR+PM $=\frac{bx}{a}$ +y. Quindi RM×

$$Mr=\left(\frac{bx}{a}-y\right)\times\left(\frac{bx}{a}+y\right)=\frac{b^2x^2}{a^2}-yy.$$

Mettendo in vece di yy il suo valore $\frac{bb}{aa}(xx-aa)$,

si avrà $RM\times Mr=\frac{bbxx}{aa}-\frac{bbxx}{aa}+\frac{aabb}{aa}=bb.$

Si osserverà che a misura che aumenta l' ascissa CP, diminuisce la retta RM, ed aumenta la retta Mr. Allorchè x diventa infinita, MR diventa infinitamente piccola, Mr diventa infinita; ed allora il prodotto d' una linea infinitamente piccola per una linea infinita, si trova sempre uguale al quadrato della linea finita CB; il che non ha nulla di strano.

381. TEOREMA IV. *Se da un punto M dell' iperbola, si conduca all' asintoto CV, la retta MI parallela all' altro asintoto: il prodotto delle due linee CI, IM sarà uguale al quadrato della linea CH.*

Il triangolo RIM è simile al triangolo CHB; il che dà RM : IM :: CB : BH. Ma per le parallele IM, Cr, si ha Mr : IC :: RM : RI :: CB : CH; si avranno dunque le due proporzioni,

$$RM : IM :: CB : BH,$$
$$Mr : IC :: CB : CH,$$

le quali danno (Alg. 131) $RM \times Mr : IM \times IC :: (CB)^2 : BH \times CH$. Ora (380) $RM \times Mr = (CB)^2$, e $BH \times CH = (CH)^2$, a motivo del triangolo isoscele CHB; dunque $IM \times IC = (CH)^2$.

382. COROLLARIO. Dunque, se si suppone $IC = u$, $IM = z$, $CH = g$: si avrà $uz = gg$, equazione dell' iperbola riferita a' suoi asintoti.

Il quadrato g^2, che è la stessa cosa del prodotto delle due linee eguali CH, HA, si chiama la *potenza* dell' iperbola.

Egli è chiaro che la potenza dell'iperbola è uguale al quarto della somma dei quadrati de' due semiassi CA, CB; poichè essendo CH la metà di AB, si ha $(CH)^2 = \frac{(AB)^2}{4} = \frac{(CA)^2 + (CB)^2}{4}$.

383. TEOREMA V. *Se dal centro C dell' iperbola (Fig. 216), con un raggio uguale all'ipotenusa AB del triangolo rettangolo ACB, che ha per lati contigui all' angolo retto i due semiassi, si descriva un cerchio che tagli il primo asse ne' punti F ed f, che si chiamano fuochi; ed in seguito da un punto qualunque M dell' iperbola, si conducano a questi punti le rette MF, Mf: la differenza di queste linee, cioè a dire, Mf—MF, sarà costantemente uguale al primo asse AE.*

La dimostrazione si fa come per l' ellisse (348), osservando che se si fa $CA = a$, $CB = b$, $AB = \sqrt{}$

$(aa+bb)=c$, $CP=x$; si ha qui $Mf=\frac{cx+aa}{a}$, $MF=\frac{cx-aa}{a}$; donde risulta $Mf-MF=2a$.

Si osserverà che, nell' ellisse, i fuochi sono sempre situati sull' asse maggiore; laddove nell' iperbola, l' asse sul quale sono situati i fuochi, può essere minore dell' asse secondario.

384. TEOREMA VI. *Gli angoli FMT, fMT, che fa la tangente MT colle rette MF, Mf, condotte dal punto M di contatto ai due fuochi, sono eguali tra loro.*

Medesima dimostrazione che per l' elisse (350), osservando che qui $MF=\frac{cx-aa}{a}$, $Mf=\ldots\frac{cx+aa}{a}$, $TP=\frac{cx-aa}{x}$, $Tf=\frac{cx+aa}{x}$.

Di qui si scorge che un atomo, partendo dal fuoco f, ed andando a battere nel punto M dell' iperbola, si rifletterà secondo una linea, il cui prolungamento passerà per l' altro fuoco F; e reciprocamente. Questa proprietà ha fatto dare il nome di *fuochi* ai punti F ed f.

Proprietà dell' iperbola per rapporto a' suoi diametri.

385. Si chiama *diametro principale* dell' iperbola ogni retta MK (Fig. 217) che passa pel centro C, e che incontra dall' una e dall' altra parte le iperbole opposte, e *diametro conjugato* al diametro MK, la retta LR parallela alla tangente MT, e terminata dalle rette ML, KR, condotte parallelamente alla retta AB che unisce ciascuna dell' e-

stremità dei due assi, e ch' è situata dalla stessa parte del punto M. Si dice altresì che il diametro MK è conjugato al diametro LR.

Si vede, come per l' ellisse, che ogni diametro principale MK è diviso in due parti uguali al centro C. Lo stesso succede pel diametro conjugato LR; poichè i due triangoli CML, CKR, che hanno tutti gli angoli eguali, hanno inoltre i lati CM, CK eguali, donde risulta CL=CR.

Una linea retta condotta da un punto dell' iperbola ad un diametro, parallelamente al diametro conjugato, si chiama *ordinata* al primo di questi diametri. Così VH o *u*H è un' ordinata al diametro MK.

Una terza proporzionale a due diametri conjugati, è il parametro del diametro, che è il primo termine della proporzione.

386. TEOREMA VII. *Se dalle estremità M ed L d' un diametro principale MK e del suo conjugato LR, si guidano all'asse AE le perpendicolari MP, LQ: la parte CQ che corrisponde al diametro secondario, sarà media proporzionale fra le ascisse AP e PE corrispondenti al diametro principale.*

Si conduca MO parallela ad AE, o perpendicolare ad LQ. Chiamando al solito AC, a; CB, b, CP, x; e CQ, z; si avrà PQ o MO $= x - z$, PM $= \frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{a}$, la sottangente PT . . . . $= \frac{xx-aa}{x}$.

I triangoli simili TPM, CQL danno PT . . . . $\left(\frac{xx-aa}{x}\right)$: PM $\left(\frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{a}\right)$ :: CQ (z) : QL $= \frac{bxz}{a\sqrt{(xx-aa)}}$. Ed i triangoli simili CBA, OLM,

danno, AC (a) : CB (b) :: MO $(x-z)$: OL $=$ $\frac{b(x-z)}{a}$. Dunque QL=QO+OL=PM+OL= . . . . $\frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{a}+\frac{b(x-z)}{a}$. Uguagliando tra loro i due valori di QL, si avrà $\frac{bxz}{a\sqrt{(xx-aa)}}=$ . . . $\frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{a}+\frac{b(x-z)}{a}$, ovvero . . . . . $xz-xx+aa=(x-z)\times\sqrt{(xx-aa)}$. Donde si ricava, quadrando ciascun membro, e riducendo l'equazione $zz=xx-aa$, cioè a dire $(CQ)^2=AP\times PE$.

387. TEOREMA VIII. *Il diametro secondario LR essendo supposto conjugato al diametro principale MK o parallelo alla tangente MT, condotta dall'estremità M di quest' ultimo, sarà eziandio parallelo alla tangente condotta, dalla sua estremità K, all'iperbola opposta.*

Difatti, se si guidino all'asse AE le ordinate perpendicolari MP, KX; i due triangoli rettangoli CPM, CXK, che hanno tutti gli angoli eguali, e le ipotenuse eguali, sono perfettamente uguali. Donde ne segue che i due rami AM, EK delle iperbole opposte essendo perfettamente uguali e simili, i due triangoli rettangoli TPM, *t*XK sono eziandio perfettamente uguali; e per conseguenza le linee TM, *t*K sono parallele.

388. COROLLARIO. Dunque, se si conducano (Fig. 218) dalle estremità L ed R d' un diametro secondario LR, le rette OLH, IRG, parallele al diametro principale e conjugato MK, le quali incontrino in H, G, O, I, le tangenti TM, *t*K, prolungate: il quadrilatero HGIO sarà un parallelogrammo. Questo parallelogrammo è composto dai

quattro parallelogrammi eguali CMHL, CKOL, CMGR, CKIR.

389. TEOREMA IX. *Il quadrato d'un ordinata VH* (Fig. 219) *al diametro MK, sta al prodotto MH × HK ossia* $(CH)^2-(CM)^2$, *dell'ascisse di questo diametro, come il quadrato del semidiametro conjugato CL al quadrato del semidiametro CM, e come il parametro del diametro MK a questo diametro.*

Medesima dimostrazione che per l'ellisse (357).

390. COROLLARIO. Le proprietà dell'iperbola in ciò che riguarda i rapporti fra i quadrati delle ordinate ed i prodotti delle ascisse, sono le medesime pei due diametri conjugati, come pei due assi.

391. TEOREMA X. *La differenza dei quadrati dei due semidiametri conjugati CM, CL è uguale alla differenza dei quadrati dei semi-assi CA, CB.*

Medesima dimostrazione che per l'ellisse (360); col solo divario che in vece di aggiungere le quantità $(CM)^2$ e $(CL)^2$, bisogna sottrarre l'una dall'altra, il che dà $(CM)^2-(CL)^2=(CA)^2-(CB)^2$.

392. TEOREMA XI. *Il parallelogrammo fatto intorno ai due diametri conjugati, è uguale al rettangolo fatto intorno ai due assi; ossia il parallelogrammo CMHL* (Fig. 218) *fatto intorno ai due semidiametri conjugati CM, CL è uguale al rettangolo CAVB fatto intorno ai due semiassi CA, CB.*

Medesima dimostrazione che per l'ellisse (361).

393. TEOREMA XII. *Se dall'estremità M* (Fig. 220) *del diametro principale MK, si conduca al fuoco f la retta Mf che incontri in Z il diametro conjugato LR: la parte MZ di questa linea sarà costantemente uguale alla metà CA del primo asse.*

Medesima dimostrazione che per l'ellisse (362).

394. PROBLEMA II. *Conoscendo di grandezza e di posizione due diametri conjugati MK, LR d'un'iperbola, determinare i suoi assi.*

Questo problema si risolve, col formare, per mezzo degli articoli 391 e 392, due equazioni fra i due assi incogniti, e le quantità cognite; equazioni che daranno i valori dei due assi, e che si costruiranno colle proprietà del triangolo rettangolo. In seguito, la posizione degli assi si determinerà per mezzo dell' articolo 393.

395. TEOREMA XIII. *Due iperbole sono simili, allorchè i loro assi omologhi sono proporzionali.*

Medesima dimostrazione che per due elissi simili (364).

Fine della Geometria e dell' Applicazione dell' Algebra alla Geometria.

APPENDICE

Sopra l'arte di levare i Piani e di costruire le Carte Geografiche.

Si chiama, in generale; *piano d'un terreno*, *carta d'un terreno*, la rappresentazione di questo terreno sopra una superficie piana ed unita, come è un foglio di carta.

Allorchè un terreno ha poca estensione, e che si può in conseguenza riguardare come una superficie piana, almeno sensibilmente, la rappresentazione deve essere simile all' oggetto; dunque fa d'uopo che gli alberi, le case, campanili, ed altri punti rimarchevoli, siano rappresentati sopra la carta nel medesimo ordine e nelle medesime proporzioni di distanze che essi hanno realmente sul terreno. Quindi la questione consiste allora nel costruire in piccolo sopra la carta, una figura che sia simile a quella del terreno, di maniera che, conoscendo il rapporto d'una linea della carta alla linea omologa del terreno, si conoscerà eziandio il rapporto di tutte le altre linee della carta a tutte le altre linee del terreno; perciocchè le linee omologhe delle figure simili sono proporzionali. Ma se ci venga proposto di rappresentare sopra la carta un' estensione considerevole di terreno, come un Regno, una Provincia, ec., la rappresentazione non può essere simile all' oggetto, perchè il globo della terra avendo la forma sferica, una parte (almeno un poco grande) della sua superficie non può essere espressa sopra un piano con una figura che le sia simile. Allora la rappresentazione

è necessariamente imperfetta; ma per rimediare a questo inconveniente, si può assoggettarla ad alcune leggi che la approssimino, quanto è possibile, alla natura, e che servano a far conoscere le distanze rispettive degli oggetti.

Del modo di levare il piano dei terreni un poco estesi.

I. Sia primieramente ACDEB (Fig. 1) un campo o una prateria di mediocre grandezza, di cui si debba levar la pianta, ed in seguito rapportarla sopra la carta. Potrà accadere che il contorno di questa prateria non sia terminato da linee rette; ed allora bisognerà dividerla in un numero assai grande di parti AC, CD, DE, EB, BA, affinchè possono essere riguardate, senza errore sensibile, come rettilinee. Avendo scelto ad arbitrio, sull' estremità, o nell' interno della prateria, un punto A dal quale si possa andare agli angoli C, D, E, D, indicati per mezzo di paline, di alberi, di pietre, o in qualsivoglia altra maniera, si dirigeranno i raggi visuali AC, AD, AE, AB, che si segneranno sul terreno, con paline piantate di tratto in tratto nella direzione di questi raggi; si misureranno, per mezzo d' una *tesa* o regolo di legno o di ferro di 6 piedi di lunghezza, le linee AC, CD, AD, DE, AE, EB, AB; si terrà una nota di queste misure, facendo colla semplice vista, sopra il terreno stesso, un disegno o *schizzo* che lo rappresenti all' ingrosso. Si tratterà in seguito di mettere questo disegno in pulito nella camera, cioè a dire, di costruire in piccolo sopra la carta un poligono *acdeb* (Fig. 2) che sia simile al poligono ACDEB del terreno. Per ciò, si comincerà a formare, sulla carta, una scala *mn*, ossia

una linea di grandezza nota, che rappresenti un certo numero di *tese*. Supponiamo, per esempio, che la linea *mn d' un pollice* di lunghezza, rappresenti 100 *tese*: allora se la linea AC è stata trovata di 200 *tese*, bisognerà che la sua rappresentazione *ac* sia fatta doppia della scala *mn*; se la linea CD è stata trovata di 300 *tese*, bisognerà che la sua rappresentazione *cd* sia fatta tripla di *mn*; così delle altre. Laonde si vede che, conoscendo tutte le linee AC, CD, AD, ec., si potrà rappresentarle per mezzo di altre linee più piccole che loro saranno proporzionali, e si conosceranno tutt' i lati dei triangoli *di riduzione*, *acd*, *dae*, *eab*. Si potranno dunque costruire (Geom. 56) tutti questi triangoli; ed il loro aggregato formerà una figura *acdeb* simile alla figura ACDEB, poichè i triangoli corrispondenti ACD ed *acd*, DAE e *dae*, ec. avendo i lati proporzionali, sono simili ciascuno a ciascuno (Geom. 117), e per conseguenza i due poligoni ACDEB, *acdeb*, che sono composti d' un medesimo numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno, e similmente disposti, sono simili (Geom. 119).

II. Gli Agrimensori fanno uso d' un altro mezzo per levare la pianta dei terreni d' una maggiore estensione. Si servono per ciò d' un istrumento che chiamasi *lo squadro degli Agrimensori*, e che consiste in due regole perpendicolari tra loro, solidamente legate, portanti alle loro quattro estremità delle altre regole verticali traforate da fenditure o da *traguardi*; a traverso de' quali si osservano gli oggetti.

Sia dunque ACDBE (Fig. 3) il terreno di cui si vuole levar la pianta. Segnerete, per mezzo di paline, una linea AB, dalla quale si possano vedere comodamente gli oggetti E, C, D; porterete lo squadro lungo questa linea, e lo collocherete

in modo che due traguardi essendo nella direzione di AB, voi vediate successivamente, a traverso degli altri due traguardi, gli oggetti E, C, D; il che vi darà le rette IE, GC, HD perpendicolari ad AB: misurerete, colla tesa, queste perpendicolari, e misurerete altresì le parti AI, AG, AH, HB. Prese tutte queste misure sul terreno, e segnate sopra uno schizzo, formerete nella camera, per mezzo d'una scala, come pel caso precedente, una figura che sia simile ad ACDBE. Sopra di che bisogna osservare che per costruire de' triangoli rettangoli, basta di avere i lati contigui agli angoli retti; poichè facendo questi lati perpendicolari tra loro, e dando loro le lunghezze convenevoli, le ipotenuse sono necessariamente determinate.

III. Vi è un altro istrumento, detto la *tavoletta*, che è molto in uso per levare i piani, e che è tanto più comodo, in quanto che il piano si trova in tutto costruito dalle operazioni medesime che si fanno sul terreno. È una tavola di legno, ben unita, d'incirca 18 pollici in quadro, portata da un piede a ginocchio, che permette di alzarla o di abbassarla ad arbitrio. Si estende e si fissa sopra questa tavola il foglio di carta che deve ricevere il disegno o il piano. Una regola di rame, detta *diottra*, o *alidada*, portante alle due estremità due traguardi per osservare gli oggetti, si colloca sulla tavoletta, e serve a prendere le linee di cui si ha bisogno.

Avendo misurata sul terreno (Fig. 4) una base AB, dalle estrimità della quale si possa vedere un certo numero di oggetti O, C, D, metterete primieramente la tavoletta al punto A in una posizione orizzontale. Suppongo che il punto *a* corrisponda perpendicolarmente al punto A. Farete piantare in B una palina o un *bastone da livello*, che si possa mirare da *a*, per mezzo dei traguardi della

alidada. Prenderete nella direzione del punto *a* e della palina B, la retta *ab*, di grandezza nota, per rappresentare la linea AB che si è misurata: dirigete dal punto *a*, verso gli oggetti O, C, D, i raggi *a*O, *a*C, *a*D, che segnerete sulla carta per mezzo di linee tirate col *lapis* o coll' inchiostro. Fatta questa prima stazione, trasporterete la tavoletta al punto B, e vi farete una seconda stazione totalmente simile alla precedente; voglio dire, che il punto *b* essendo supposto corrispondere perpendicolarmente al punto B, e la retta *ba* essendo situata nella direzione del punto *b* con una palina piantata in A, bisognerà dirigere verso i punti O, C, D, i raggi *b*O, *b*C, *b*D: questi raggi taglieranno i primi *a*O, *a*C, *a*D, nei punti *o*, *c*, *d*; e si avrà sulla tavoletta, la figura *aocdb* simile al terreno.

Accade sovente di non poter vedere dalle estremità della base AB, tutti gli oggetti di cui si vuol levare la pianta; ma dopo avere rapportato, per esempio, la retta AO in *ao*, si conoscerà la retta AO, col mezzo della scala, cioè a dire, col rapporto che la retta *ab* ha alla retta *ao*; e si potrà considerare AO come una base, di modo che gli oggetti che si vedranno dalla sua estremità O, potranno ancora essere segnati sulla carta; così di molte altre basi.

IV. Si scorge che moltiplicando convenevolmente le operazioni, si giungerebbe a rappresentare un terreno nel maggior dettaglio. Ma vi sono alcuni dettagli che si possono eseguire in una maniera più semplice e più comoda, facendo uso della *bussola*. Vi è dunque, perciò, una scatola che contiene un ago di ferro calamitato, mobile sopra un asse o perno, e che porta una regola mobile guernita di due traguardi. La proprietà dell' ago calamitato è, come si sa, di dirigersi verso il nord, o almeno

di formare colla linea nord e sud, un angolo che per un medesimo luogo e per un medesimo tempo, può essere considerato come costante; di maniera che l'ago, nelle sue differenti posizioni, si può sempre supporre che rimanga parallelo alla sua posizione iniziale.

Suppongo adunque che i due punti A e B essendo già levati e rapportati in *a*, *b*, vi sia (Fig. 5) da A verso B, un fiume o una strada tortuosa AMNPB, che trattasi di rappresentare. Osserverete in A, l'angolo zAM che fa l'ago colla prima parte AM della strada: trasporterete successivamente la bussola agli angoli o gomiti M, N, P, ed osserverete gli angoli AM*m*, MN*n*, ec., che formano le direzioni M*m*, N*n*, ec. dell'ago, colle altre parti della strada: di più misurerete le linee AM, MN, NP, ec. In seguito rapporterete il tutto sopra la carta, sottomettendo le linee AM, MN ec. alle proporzioni della scala, e costruendo, col mezzo d'un piccolo istrumento di corno o di rame detto *rapportatore*, diviso in gradi e minuti, gli angoli, come sono stati osservati sul terreno.

V. La pianta fatta colla tavoletta ha questo inconveniente, che gli angoli, e conseguentemente le lunghezze delle linee che ad essi terminano (eccettuata però la prima base che è stata misurata), essendo dati per mezzo d'intersezioni che possono non esser perfettamente giuste, le posizioni rispettive degli oggetti sulla carta sono qualche volta un poco fallaci. Se si vuol levare un piano con una maggior esattezza, bisognerà adoprare le operazioni della Trigonometria.

Così, per esempio, dopo aver misurata esattamente una base AB (Fig. 6.), bisognerà dirigere i raggi visuali AO, AC, AD, BO, BC, BD, verso gli oggetti O, C, D; misurare per mezzo del *grafometro* o d'un *quadrante* gli angoli OAC,

CAD, ec.; in fine calcolare, colle regole della Trigonometria, le rette AO, AC, ec. Essendo note tutte queste linee, si potrà esprimerle in parti d' una medesima scala; ed allora per fare il piano, non si tratterà che di costruire de' triangoli di cui si conoscono tutti i lati.

VI. Se i punti A, B, O, C, D, fossero situati, relativamente all' orizzonte, ad altezze abbastanza differenti le une dalle altre, perchè si dovesse aver riguardo a queste differenze, bisognerebbe cominciare dal projettare tutte questi punti sopra un medesimo piano orizzontale; ed in seguito si farebbe la carta della figura di *projezione*. Mi spiego.

La scelta del piano orizzontale destinato a ricevere la projezione, è arbitraria; ma per maggior semplicità, prendo il piano orizzontale che passa pel punto più basso di quelli chi si vogliono levare, e suppongo, per esempio, che A sia questo punto. Concepiamo adunque che passi per A un piano orizzontale, sul quale cadono dagli altri punti O, C, D, B, le perpendicolari *Oo*, *Cc*, *Dd*, *Bb*, e guidiamo le rette *Ao*, *oc*, *Ac*, *cd*, ec. La figura *AocdbA*, è ciò che chiamasi la *projezione del terreno*; e la questione si riduce a determinare i lati e gli angoli di questa figura, per poter in seguito ridurla e rappresentarla sopra una carta.

Primieramente le rette AO, AC, AD, ec. si calcolano, come abbiamo già detto, colle regole della Trigonometria. Inoltre, si avrà avuta la cura di misurare, per mezzo del quadrante, o del grafometro con un filo a piombo, gli angoli che formano le rette AO, AC, AD, ec., colla linea verticale che passa pel punto A; il che fa conoscere tutti gli angoli de' triangoli rettangoli AoO, AcC, AdD, ec. Quindi essendo date le ipotenuse AO, AC, AD, ec. si potranno conoscere (Geom. 257),

i lati Ao, Ac, Ad, ec. Rimangono a trovarsi gli angoli di projezione oAc, cAd, ec.

Consideriamo il punto A (Fig. 7), come il centro d' una sfera; immaginiamoci che la verticale AZ innalzata dal punto A, e le rette AO, AC, prolungate, vadano ad incontrare la superficie di questa sfera nei punti Z, K, H; congiungiamo questi tre punti coi tre archi di circoli massimi ZK, ZH, KH; noi avremo un triangolo sferico ZKH, nel quale si conosceranno i tre lati; imperciocchè il lato ZK è la misura dell' angolo noto che fa AO colla verticale; il lato ZH è la misura dell' angolo noto che fa AC colla verticale; ed il lato KH è la misura dell' angolo noto OAC che formano tra loro le rette OA, CA. Dunque si conoscerà l' angolo Z, per l' ultimo caso della Tavola II, dei triangoli sferici. Ora, questo angolo Z non è altra cosa che l' angolo di projezione oAc, poichè le rette oA, cA sono perpendicolari al medesimo punto A della sezione comune AZ de' circoli ZK, ZH.

Si determineranno nella stessa maniera gli altri angoli di projezione cAd, bAd (Fig. 6).

Costruzione delle carte Geografiche.

I. Il globo della terra è, almeno sensibilmente, una sfera che si rivolge intorno a se stessa, in 24 ore, d' occidente in oriente; dal che risulta che il Sole ci sembra girare, nel medesimo tempo, d' oriente in occidente. Le estremità dell' asse di rivoluzione si chiamano *i poli* della terra; quello che è dalla parte del nord, è il polo *artico*, l' altro è il polo *antartico*.

Il circolo massimo perpendicolare all' asse di rivoluzione si denomina *equatore*; esso divide la terra in due *emisferi*: l' emisfero *settentrionale* o *boreale*, e l' emisfero *meridionale* o *australe*.

I circoli minori della terra, paralleli all' equatore, si chiamano i *circoli paralleli*, o semplicemente i *paralleli*.

Un circolo massimo che passa per l' asse di rivoluzione, dicesi *meridiano*. Si scorge che vi è un' infinità di meridiani; e che ciascun luogo ha il suo meridiano particolare. Ciascun meridiano divide il globo in due emisferi, l' uno *orientale*, l' altro *occidentale*.

Un circolo massimo perpendicolare alla linea d' appiombo d' un luogo, cioè a dire, alla direzione d' un filo che sostiene un peso, chiamasi *orizzonte* di questo luogo. Il punto del cielo, che corrisponde perpendicolarmente a questo stesso luogo, ne è il *zenith*; il punto diametralmente opposto, il *nadir*.

II. La posizione dei luoghi sopra la superficie della terra dipende dalla loro *latitudine* e dalla loro *longitudine*, combinate insieme. Si chiama *latitudine* d' un luogo, l' arco del meridiano, compreso frà questo luogo e l' equatore; e *longitudine* l' arco dell' equatore, compreso fra il meridiano e quel punto fisso, per dove si suppone che passi il meridiano che riguardasi come il primo di tutti. Si comprende che la scelta di questo primo meridiano è arbitraria. Quindi esso non è il medesimo per tutti i popoli. Vi è un' ordinanza di Luigi XIII. dell' anno 1634, che ingiunge ai Geografi Francesi di prendere per primo meridiano quello dell' isola del Ferro, la più occidentale delle isole Canarie.

Si distinguono due sorte di Carte geografiche: le carte universali o i *Mappamondi*, che rappresentano il globo intero o solamente una delle sue metà; e le carte particolari, che rappresentano degli spazj meno estesi. La situazione dei luoghi devè essere segnata sulle une e sulle altre per mezzo delle latitudini e longitudini, cioè a dire, per

mezzo delle intersezioni dei meridiani e dei paralleli.

Costruzione de' Mappamondi.

III. Un Mappamondo rappresenta i luoghi, come apparirebbero, se fossero veduti da un punto dato nello spazio. Bisogna dunque concepire che da un occhio, situato in un luogo noto, partano de' raggi che vadano a terminare a tutti i luoghi che si vogliono rappresentare; e che questi raggi venendo ad incontrare un foglio di carta trasparente interposta, vi formino la *projezione* o la rappresentazione richiesta. Prendiamo a spiegare il modo di fare questa projezione o sopra il piano dell' equatore o sopra quello d' un meridiano, o sopra quello d' un orizzonte: supponendo sempre che l' occhio sia situato sull' asse del cerchio di projezione, cioè a dire, sulla perpendicolare che passa pel centro di questo cerchio. Questi tre problemi comprendono tutti i Mappamondi usitati.

Mappamondo sul piano dell' Equatore.

IV. Supponendo che la carta non si estenda oltre la circonferenza dell' equatore, egli è chiaro 1.° che non si può rappresentare nello stesso tempo se non un emisfero; 2.° che l' occhio deve essere situato sull' asse, dalla parte opposta all' emisfero che si projetta. Così, per esempio, per projettare l' emisfero australe, fa duopo che l' occhio sia situato dalla parte del polo artico.

Immaginiamoci che questo emisfero sia tagliato 1.° da una serie di piani, che passino per l' asse dell' equatore, 2.° da una serie di piani perpendicolari a questo asse medesimo. I piani della prima specie formano dei semimeridiani alla superficie del-

l' emisfero; ed i loro incontri col piano dell' equatore sono delle linee rette, secondo le quali l' occhio vede questi Meridiani, sul piano dell' equatore. I piani della seconda specie, formano sulla superficie dell' emisfero, de' cerchi paralleli; questi cerchi veduti sul piano dell' equatore, sono degli altri cerchi d' un raggio più piccolo. Ciò ben compreso, la carta si costruisce così.

Dal punto *c* come centro (Fig. 8), e con un raggio preso ad arbitrio, descrivete il cerchio *o*, 1, 2, 3, ec., che rappresenti l' equatore; dividete la sua circonferenza in gradi (qui, per abbreviare, noi li dividiamo soltanto in 12 parti); e guidate i raggi *co*, *c*1, *c*2, *c*3, ec. Questi raggi segnano i meridiani de' luoghi o, 1, 2, 3, ec.

Per delineare i paralleli, guidate i due diametri o, 6; 3, 9, perpendicolari tra loro. L' occhio essendo supposto distante dal centro *c*, d' una quantità data, prendete sul raggio *c*, 9 la parte *cS* eguale a questa quantità, e conducete dal punto ai punti 1, 2, 3, 4, ec. Le rette *S* 1, *S* 2, ec., che incontrano il diametro *o*, 6 nei punti *a*, *b*, ec.: voi vedrete facilmente che i circoli *ahek*, *bldm*, ec., descritti dal punto *C*, coi raggi, *ca*, *cb*, ec, rappresentano i *paralleli* de' luoghi che hanno delle latitudini eguali agli archi, o1, o2, ec.

Si compirà la carta, collocandovi (per mezzo d' una buona tavola di latitudini e di longitudini) i luoghi, come sono situati sopra la terra. Quelli che sono alla circonferenza di un medesimo parallelo hanno la medesima latitudine; e quelli che sono alla circonferenza d' un medesimo meridiano, hanno la medesima longitudine.

L' emisfero boreale si projetterà nella stessa maniera sopra una carta a parte: colla sola differenza che l' occhio sarà situato dalla parte del polo antartico.

La maggior parte degli Autori, che hanno fatto uso di questa projezione, suppongono che l'occhio sia situato ad uno de' poli dell'equatore; il che rende i gradi eguali de' meridiani, ineguali sulla carta. Si può rimediare, almeno in parte, a questo inconveniente, con situare l'occhio sul prolungamento dell'asse dell'equatore, ad una distanza dal polo, eguale al seno di 45.°

Mappamondo sul piano d' un Meridiano.

V. Prendiamo, per esempio, il meridiano dell'isola del Ferro, ossia il primo meridiano, nel piano della carta; e supponiamo primieramente che si debba projettare l'emisfero orientale, che contiene l'antico *Mondo* o *Continente*, cioè a dire, l'*Europa*, l'*Asia*, e l'*Africa*: bisognerà che l'occhio sia situato sull'asse del meridiano proposto, dalla parte del polo occidentale; noi lo supporremo situato a questo polo medesimo. Si tratta di determinare le projezioni o le curve, secondo le quali l'occhio vede i semimeridiani ed i semiparalleli compresi nell'emisfero orientale.

Supponiamo (Fig. 9) SBKC un cerchio massimo della terra, che noi consideriamo 1.° come l'equatore; siano SK; BC due diametri perpendicolari tra loro, S, il luogo dell'occhio; il triangolo isoscele SBC, il *triangolo per l'asse* del cono che ha il suo vertice nell'occhio S, e per base il primo meridiano, il quale taglia perpendicolarmente l'equatore secondo BC; il triangolo SFD, il triangolo per l'asse del cono scaleno che ha il suo vertice nell'occhio S, e per base il meridiano che taglia perpendicolarmente l'equatore secondo FD. La metà di questo meridiano, quella che corrisponde ad AE, si trova nell'antico Continente che noi consideriamo; l'altra metà, quella che

corrisponde ad AD, è nell' emisfero opposto. Gli angoli SNA, SDE sono eguali, poichè il primo (Geom. 38) ha per misura la metà del quarto di circonferenza SHC, più la metà dell' arco BE: ed il secondo (Geom. 35) ha per misura la metà del quarto di circonferenza SHB più la metà dell' arco BE. Quindi il cono scaleno di cui SED è il triangolo per l' asse, è tagliato *antiparallelamente* (*) alla sua base dal piano del primo meridiano; e per conseguenza la projezione del semimeridiano qualunque, che corrisponde ad AE è un arco di cerchio. Di più si vede che quest' arco deve passare pel punto N, e pei due poli dell' equatore.

2.° Consideriamo il cerchio SBKC come il meridiano che taglia perpendicolarmente il primo meridiano: sia guidata la corda FH parallela a KS; e siano tirate le rette SF, SH: egli è evidente che FH è il diametro d' un parallelo, di cui una metà, quella che noi consideriamo, corrisponde ad MF, l' altra ad MH; e che il triangolo SFH è il triangolo per l' asse d' un cono scaleno; il cui vertice è l' occhio S, e la base, il parallelo in questione. Ora, a motivo degli angoli eguali SOM, SHF,

---

(*) Un cono scaleno SAKBH (Fig. A) si dice tagliato *antiparallelamente* alla sua base, quando il piano secante, supposto perpendicolare al triangolo per l' asse SAB, incontra questo triangolo secondo una retta OE che fa col lato SB, un angolo SEO eguale all' angolo SAB che fa la base BA coll' altro lato SA. Allora, la base AKBH del cono essendo supposta circolare, la sezione OMEp è un cerchio; imperciocchè se dopo aver condotta l' ordinata PM perpendicolare ad OE, si fa passare per PM il piano CMDx parallelo alla base AKBH, la curva CMDx sarà un cerchio, e si avrà $(PM)^2 = PC \times PD$. Ora, a motivo dei triangoli simili PCO, PED, si ha PC : PE :: PO : PD; il che dà $PC \times PD = PE \times PO$; dunque $(PM)^2 = PE \times PO$. Dunque la curva OMEp è un cerchio.

ne segue che il cono scaleno corrispondente al triangolo SFH è segato antiparallelamente alla sua base dal piano di projezione, e che per conseguenza la projezione del semiparallelo qualunque, corrispondente ad MF, è un arco di cerchio. Di più si vede che quest' arco deve passare pei tre punti F, O, H.

Quindi ne risulta questa costruzione. Dal punto *c* come centro (Fig. 10), con un raggio preso ad arbitrio, descrivete il primo meridiano o, 3, 6, 9; dividete la sua circonferenza in tutti i suoi gradi (noi dividiamo soltanto in 12 parti o: 1,: 1, 2: 2, 3 ec., per abbreviare); conducete i due diametri o, 6: 3, 9 perpendicolari tra loro.

Ciò posto, 1.° da una 9 delle estremità del diametro 3, 9, tirate a tutti i punti 1, 2, 3, ec. di divisione della semicirconferenza o, 3, 6, le rette 9, 1: 9, 2: 9, 3 ec., che incontrano il diametro o, 6 ne' punti *a*, *b*, *c*, ec. In seguito fate passare un arco di cerchio pei tre punti 9, *a*, 3; quest' arco sarà la projezione del semimeridiano, che corrisponde al punto 1; così di seguito per gli altri semimeridiani. Si vede che la projezione del semimeridiano che corrisponde al punto 3, è il diametro 9, 3.

2.° Dall' estremità 6 del diametro o, 6 guidate a tutti i punti di divisione 2, 1, o, ec. della semicirconferenza 3, o, 9 le rette 6, 2: 6, 1: 6, o ec., che incontrano il diametro 3, 9 nei punti *h*, *f*, *c*, ec. In seguito, pei tre punti 1, *f*, 5, fate passare un arco di cerchio; quest' arco sarà la projezione pel semiparallelo che corrisponde ai punti 1, 5. Così di seguito per gli altri semiparalleli.

Si collocheranno, per mezzo della Tavola delle latitudini e delle longitudini i luoghi sulla carta, come sono situati sul globo.

L' emisfero occidentale, che contiene l' *America*, si projetterà nella stessa maniera; ma bisognerà situare l' occhio al polo orientale del meridiano dell' isola del Ferro.

Questa projezione ha, sopra la prima il vantaggio di rappresentare in un modo un poco più vero la posizione rispettiva dei luoghi. Quindi ella è stati posta in uso da una gran parte di Geografi, e fra gli altri da GUGLIELMO DE L' ISLE.

Mappamondo sopra il piano d' un Orizzonte.

VI. Supponiamo, per esempio, che si debba costruire un mappamondo sopra l' orizzonte della città di Parigi, e che l' occhio sia situato al polo di quel circolo, ch' è opposto a Parigi.

1.° Siano (Fig. 11) KH un diametro della terra; comune all' orizzonte di Parigi, e ad un meridiano qualunque; SKMH, un cerchio massimo che passa per HK, o per l' occhio che essendo situate al polo opposto a Parigi si trova in S, estremità del diametro SM perpendicolare a KH. Immaginiamoci un cono scaleno che abbia il suo vertice in S, e per base il meridiano proposto: seghiamo questo cono con un piano che passi per SA, e sia perpendicolare a KH; la sezione che è il triangolo per l' asse del cono, essendo supposta giacere sopra il piano SKMH, potrà essere rappresentata da un triangolo, come SCB, che ha per base il diametro qualunque BC, e per lati le rette SC, SB. Allora si vede che a motivo degli angoli eguali SIA, SBC, il nostro cono è segato antiparallelamente alla sua base dal piano di projezione. Laonde ne segue che le projezioni dei meridiani sono dei cerchi. Inoltre la projezione d' un semimeridiano qualunque, compreso nell' emisfero che consideriamo, è un arco di cerchio che de-

ve passare per le due intersezioni di questo semimeridiano coll' orizzonte di Parigi, e per la projezione del polo artico sopra questo stesso orizzonte. La projezione del meridiano di Parigi è una semplice linea retta.

2.° Consideriamo il cerchio SKMH come il meridiano di Parigi; siano M, questa città; P, il polo artico; PR, l' asse della terra; EF perpendicolare a PR, la sezione dell' equatore col meridiano di Parigi; QT altresì perpendicolare a PR, la sezione d' un parallelo qualunque col medesimo meridiano; conduciamo le rette SE, SF, SQ, ST. I due coni scaleni, che hanno i loro vertici in S, e per base uno l' equatore, l' altro il parallelo rappresentato da QT, sono segati antiparallelamente alle loro basi, dal piano KH di projezione; perciocchè i due angoli SGA, SFE sono eguali, e parimenti i due angoli SOL, STQ sono eguali. Quindi le projezioni dell' equatore e dei paralleli sono ancora dei cerchi.

Quindi ne segue questa costruzione. Siano il cerchio ZHXK (Fig. 12.) il piano di projezione, o il cerchio massimo della terra, di cui la città di Parigi è uno dei poli; il diametro ZX, la projezione del meridiano di Parigi; e sia condotto il diametro HK perpendicolare a ZX. Dividete la circonferenza ZHXK in 360 gradi ne' punti Z, *a*, *b*, ec. poi tirate dal punto K, a tutti i punti di divisione della semicirconferenza ZHK, le rette K*a*, K*b*, ec. che dividono il diametro ZX in 180 parti o gradi nei punti *p*, *q*, ec. Supponendo che la latitudine di Parigi sia di 49 gradi (*), egli è chiaro che se si prendono sul diametro ZX, 49 gra-

(*) La latitudine dell' Osservatorio di Parigi è di 48.° 50.' 14''.

di da Z in P, il punto P sarà la la projezione del polo artico.

Adesso, 1.° fate passare pel polo P, e pei punti *a* e *k* corrispondenti nelle due semicirconferenze ZHX, ZKX, un arco di cerchio: quest'arco rappresenterà il semimeridiano che corrisponde ai punti *a* e *k*; così degli altri.

2.° La parte ZP del diametro ZX essendo di 49 gradi, scriverete 41 al punto Z; ed andando da Z in P, scriverete sopra tutti i punti che segnano i gradi del diametro ZX, i numeri 42, 43, 44. ec.; finchè siate arrivato al polo P ove metterete 90; continuerete il vostro cammino, e scriverete successivamente sopra tutt' i gradi di divisione, i numeri 89, 88, 87 ec., finchè siate arrivato a zero che suppongo cadere nel punto *s*, da *s* in X, i numeri 1, 2, 3, ec. Il punto *s* rappresenterà l' intersezione del meridiano di Parigi coll' equatore. Prenderete gl' intervalli dei numeri corrispondenti PX e PZ e sopra questi intervalli, come diametri, descriverete dei cerchi o porzioni di cerchi che rappresenteranno i paralleli o porzioni di paralleli.

Costruzione delle Carte particolari.

VII. Le quattro parti del Mondo, l' *Europa*, l' *Asia*, l' *Africa*, l' *America*, si projettano separatamente, secondo i medesi principj come pei Mappamondi: non vi è altra differenza, se non che le dimensioni della carta sono più grandi, e gli oggetti vi si vedono più distintamente.

Le carte dei Regni e delle grandi Provincie si costruiscono ordinariamente così.

Primieramente si tira a' piedi del piano una linea retta che possa rappresentare la longitudine, e che serve di limite alla parte meridionale del pae-

se che si vuol descrivere; in seguito si prendono sopra questa linea tante parti eguali, quanti gradi di longitudine comprende il paese; nel mezzo di questa stessa linea s' innalza una perpendicolare, sopra la quale si prendono tante parti eguali, quanti gradi di latitudine contiene il paese, e siccome queste parti rappresentano i gradi d' un meridiano ch' è un cerchio massimo della terra, mentre le parti della prima linea rappresentano i gradi d' un parallelo, ch' è un circolo minore; così egli è evidente che le parti d' una linea non devono essere uguali alle parti dell' altra; ma le parti del parallelo devono stare alle parti del meridiano, come il raggio del parallelo al raggio della terra, o come il coseno della latitudine del parallelo al seno totale. Si guida dall' estremità superiore della seconda linea una perpendicolare sopra la quale si prendono delle parti eguali, che stiano alle parti del meridiano, come il coseno della latitudine dell' ultimo parallelo sta al seno totale; si tirino pei punti di divisione delle due linee parallele, delle linee rette che rappresentano i meridiani; e pei punti di divisione della perpendicolare del mezzo, si conducano parallelamente alle basi, delle linee rette che rappresentino i cerchi di latitudine.

Le carte di piccolissime estensioni di paese si costituiscono nel modo che abbiamo spiegato nella prima parte di questa Appendice.

AGGIUNTE

AL CORSO DI MATEMATICA

DEL SIGNOR

ABATE BOSSUT

AVVERTIMENTO

Queste Aggiunte comprendono delle considerazioni generali sopra la natura delle Equazioni determinate di tutti i gradi; due metodi per trovare i divisori commensurabili che esse possono contenere; la teoria delle equazioni che contengono radici eguali; i metodi per risolvere, per approssimazione, le Equazioni numeriche di tutti i gradi; la risoluzione prossima delle Equazioni letterali; le formole di Halley generalizzate dall' Abbate Marie, per estrarre per approssimazione qualsivoglia radice da un binomio qualunque; un' Appendice alla Trigonometria; per fine alcuni cenni sull' analisi indeterminata.

CAPO I.

Considerazioni generali sopra la natura delle Equazioni determinate di tutti i gradi.

1. Sia, fra l'incognita x e le date a, b, c, d, l'equazione $(x-a)\times(x-b)\times(x-c)\times(x-d)=0$, cioè a dire, effettuando le moltipliche, ed ordinando il prodotto finale per rapporto ad x,

$$(A)\left.\begin{array}{l} x^4 \begin{array}{l}-a\\-b\\-c\\-d\end{array}\!\!\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\\c\\d\end{array}}\right\} x^3 \begin{array}{l}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\!\!\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{array}}\right\} x^2 \begin{array}{l}-abc\\-abd\\-acd\\-bcd\end{array}\!\!\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\\c\\d\end{array}}\right\} x+abcd \end{array}\right\}=0.$$

Egli è chiaro che l'aggregato dei termini che compongono il primo membro di questa equazione, può essere uguale a zero in quattro differenti maniere; vale a dire, supponendo, $x=a$, o $x=b$; o $x=c$, o $x=d$. Imperciocchè in tutti i casi, si avrà zero per uno dei quattro fattori $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$. Ora, zero moltiplicando quantità qualunque, dà zero per prodotto. Se si mettesse in vece di x qualunque altro valore e; allora alcuno de' fattori $e-a$, $e-b$, $e-c$, $e-d$ non essendo zero, neppure il loro prodotto sarebbe zero. Vi sono adunque nell'equazione proposta quattro radici o valori per x; e ciò che caratterizza queste radici, si è che sostituendo successivamente ciascuna di esse in luogo di x, la totalità dei termini dell'equazione svanisce per l'opposizione dei segni $+$ e $-$.

L'equazione precedente è soltanto del quarto grado; ma ben si vede che la medesima osservazione

si applica ad ogni sorta di equazioni, cioè a dire, che in generale un'equazione d'un grado qualunque ha tante radici, quante sono le unità nell' esponente della più alta potenza dell' incognita; e che ciascuna radice ha la proprietà di rendere, colla sua sostituzione in luogo dell' incognita l' aggregato di tutti i termini dell' equazione uguale a zero.

Non ho bisogno di far osservare che non si può supporre nel medesimo tempo per le radici d' una equazione, $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, giacchè queste equazioni particolari hanno luogo solamente nel senso disgiuntivo. Esse sono comprese, come fattori, in una medesima equazione; perchè l' Algebra, come abbiamo già osservato (Alg. 183) dà, colla stessa formola, non solo la soluzione del problema particolare che è stato proposto, ma ancora la soluzione di tutti i problemi che hanno delle condizioni simili. Le differenti radici dell' equazione soddisfano a ciascuna condizione. Queste radici possono differire tra loro, nella quantità e nel modo di essere.

Si dice qualche volta che le radici d' un equazione sono $x=a$, $x=b$, $=c$ ec., il che dà $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$ ec.; ma questo modo di dire è un abbreviamento che si deve intendere nel senso che abbiamo spiegato.

Nell' equazione che precede, tutte le radici sono positive. L' equazione seguente $(x+a)\times(x+b)\times(x+c)\times(x+d)=0$, cioè a dire.

$$(B)\; x^4 \left.\begin{matrix}+a\\+b\\+c\\+d\end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+cd\\+bd\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}+abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{matrix}\right\} x + abcd \Bigg\} = 0$$

ha tutte le sue radici negative. Queste radici sono $x=-a$, $x=-b$, $x=-c$, $x=-d$, equazioni che bisogna sempre intendere nel senso disgiuntivo.

Vi sono delle equazioni che hanno le loro radici in parte positive ed in parte negative. Tale è l'equazione.

$$(C)\; x^3 \left.\begin{matrix}-a\\-b\\+c\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}+ab\\-ac\\-bc\end{matrix}\right\} x + abc \left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\} = 0,$$

che ha due radici positive, vale a dire $x=a$, $x=b$, ed una radice negativa; vale a dire, $x=-c$.

Egli è chiaro, in generale, che un' equazione ha tanti termini, più uno, quante sono le radici che contiene.

2. Osservazione I. Le equazioni precedenti sono state riguardate come formate da equazioni del primo grado; ed allora ciascuna di esse contiene altrettante di queste equazioni componenti, quante sono le unità nell' esponente del suo grado. Si può altresì riguardare un'equazione che passa il secondo grado, come composta d'una o di più equazioni del secondo grado o del terzo ec. combinate, se è necessario, con equazioni del primo; di modo che il prodotto di tutte queste equazioni componenti formi un' equazione del medesimo grado della proposta, e che intieramente coincida con essa. Difatti, quando si compone un' equazione colla successiva moltiplica di più equazioni del primo grado, si formano delle equazioni del secondo grado o del terzo, ec. che si possono per conseguenza prendere per fattori della proposta.

3. Osservazione II. Può accadere che un'equazione contenga delle radici immaginarie, ed allora se ne trovano altresì nelle sue equazioni compo-

nenti. Queste sorti di radici vanno sempre a due a due, perchè si passono riguardare come contenenti nella loro espressione almeno un radicale *pari* posto innanzi ad una quantità negativa, e che un tal radicale porta essenzialmente il doppio segno $\pm$. Sia, per esempio, l'equazione $x^4-(2a-2c)x^3+(aa+bb-4ac+cc+dd)x^2+(2aac+2bbc-2acc-2add)x+(aa+bb)(cc+dd)=0$, che si può considerare come composta dalle due equazioni del secondo grado, $xx-2ax+aa+bb=0$, $xx+2cx+cc+dd=0$. Ciascuna di queste equazioni componenti contiene due radici immaginarie. Difatti, la prima $xx-2ax+aa+bb=0$, dà $x=a\pm b\sqrt{-1}$; e la seconda $xx+2cx+cc+dd=0$, dà $x=-c\pm d\sqrt{-1}$.

Si vede che nell' equazione risultante dal prodotto di queste due equazioni, i coefficienti delle potenze dell' incognita, e l'ultimo termine dell' equazione, sono quantità reali, disparendo le immaginarie per via di addizione e di moltiplica. Lo stesso succederà nell' equazione $(x-a)(x+b)\times(xx+2cx+cc+dd)=0$, che è formata da due equazioni del primo grado e da un' equazione del secondo, le cui radici sono immaginarie; così delle altre.

4. TEOREMA I. *Qualunque sia la specie delle radici d' un' equazione; se si ordina quest' equazione per rapporto all' incognita, e che il primo termine sia positivo, e non abbia altro coefficiente fuorchè l' unità: si osserveranno le proprietà seguenti.*

I.° *Il primo termine dell' equazione è l' incognita elevata alla potenza espressa dal numero delle radici.*

II.° *Il secondo termine contiene l' incognita elevata ad una potenza minore d' un' unità, con un coefficiente uguale alla somma delle radici prese con segni contrarj.*

III. *Il terzo termine contiene l' incognita eleva-*

ta ad una potenza ancora minore d' un' unità, con un coefficiente uguale alla somma di tutti i prodotti che si possono formare, moltiplicando tutte le radici a due a due.

IV.° *Il quarto termine contiene l'incognita elevata ad una potenza ancora minore d' un'unità, con un coefficiente uguale alla somma de' prodotti che si possono fare, moltiplicando a tre a tre tutte le radici prese con segni contrarj.*

Così di seguito, sino all'ultimo termine che è il prodotto di tutte le radici prese con segni contrarj.

Tutto ciò è evidente dall' ispezione delle equazioni date per esempj negli articoli 1 e 3.

5. COROLLARIO I. Dunque un' equazione non ha il secondo termine, quando tutte le sue radici essendo supposte reali, alcune sono positive, e le altre negative, e inoltre la somma delle radici positive è uguale alla somma delle radici negative. Così, per esempio, l' equazione (C) dell' articolo 1. non avrà il secondo termine, se si ha $a+b=0$. Un' equazione, le cui radici sono tutte immaginarie, non avrà il secondo termine, se la somma delle quantità reali, che entrano nelle espressioni delle radici, è in parte positiva, in parte negativa, e il risultato si riduca a zero: distruggendosi scambievolmente le parti immaginarie coll' addizione in ciascuna coppia di radici. Così la prima equazione dell' articolo 3 non avrà il secondo termine, se sia $-2a+2c=0$, ossia $a=c$. La seconda equazione del medesimo articolo, la quale ha le sue radici in parte reali, ed in parte immaginarie, non avrà il secondo termine, se sia $b-a+2c=0$, ossia $a-b=2c$. Un' equazione non avrà il terzo termine, se la somma de' prodotti delle radici prese a due a due, è in parte positi-

va, e in parte negativa, e il risultato sia eguale a zero, ec.

Si chiama *equazione completa* quella che ha tutti i suoi termini. Un' equazione in cui mancano uno o più termini, è *incompleta*: tale è l' equazione $x^3+r=0$, che non ha nè secondo, nè terzo termine. Si può sempre ridurre un' equazione incompleta alla forma delle equazioni complete, col prefiggere il coefficiente zero alle potenze mancanti dell' incognita, il che è qualche volta necessario o utile. Così in vece dell' equazione $x^3+r=0$, si può scrivere $x^3\pm 0x^2\pm 0x+r=0$.

6. COROLLARIO. II. Un' equazione, che ha delle radici positive, può essere trasformata in un altra che abbia delle radici negative del medesimo valore, e reciprocamente. Basta per ciò di cambiare i segni de' termini alternativi, a contare dal secondo inclusivamente. Per esempio, se in vece dell' equazione $x^3-8x^2+17x-10=0$, che ha le radici positive $x=1$, $x=2$, $x=5$, si scriva $x^3+8x^2+17x+10=0$; quest' ultima equazione avrà le tre radici negative $x=-1$, $x=-2$, $x=-5$. Parimente, se in vece dell' equazione $x^3+2x^2-13x+10=0$, che ha le due radici positive $x=1$, $x=2$, e la radice negativa $x=-5$, si scriva $x^3-2x^2-13x-10=0$; quest' ultima equazione avrà le due radici negative $x=-1$, $x=-2$, e la radice positiva $x=5$.

Sieno in generale le due equazioni $(x-a)\times(x-b)\times(x-c)\times(x-d)\times$ec.$=0$, $(x+a)\times(x+b)\times(x+c)\times(x+d)\times$ec.$=0$, le cui radici sono le medesime, da' segni in fuori. Se si svolgono queste equazioni, si vedrà (4) che devono avere segni differenti al secondo termine; il medesimo segno al terzo; segni differenti al quarto; il medesimo segno al quinto; ec.

Se un' equazione non avesse tutti i suoi termini bisognerebbe cominciare dal supplire i termini

mancanti, collo zero, per potervi applicare la regola di cui si tratta.

7. COROLLARIO III. Senza conoscere in particolare le radici d'un'equazione, si può trovare la loro somma, quella de' loro quadrati, quella de' loro cubi, ec. Imperciocchè sia l'equazione del grado qualunque (m) $x^m+fx^{m-1}+gx^{m-2}+hx^{m-3}$ ec.$=0$; e denominiamo a, b, c, ec. le sue radici. Ciò posto.

1.° La somma delle prime potenze delle radici, cioè a dire, la somma delle radici stesse, ossia $a+b+c+$ec.$=-f$, poichè il coefficiente dell'incognita nel secondo termine è uguale alla somma delle radici prese con segni contrarj.

2.° La somma de' quadrati delle radici, cioè a dire, $a^2+b^2+c^2$ec.$=f^2-2g$. Imperciocchè se si fa (Alg. 79.) il quadrato del polinomio $a+b+c+$ec., si troverà che questo quadrato contiene la somma de' quadrati dei termini a, b, c, ec., più il doppio della somma dei prodotti che si formano, dal moltiplicare insieme a due a due tutte le radici a, b, c, ec. cioè a dire, si avrà $(a+b+c+\text{ec.})^2$ $=a^2+b^2+c^2+$ec.$+2$ ($ab+ac+bc+$ec.). Ora si ha $(a+b+c+\text{ec.})^2=f^2$, ed $ab+ac+bc+$ec.$=g$. Dunque si avrà $f^2=a^2+b^2+c^2+$ec.$+2g$, e per conseguenza $a^2+b^2+c^2+$ec.$=f^2-2g$.

3.° La somma de' cubi delle radici, cioè a dire, $a^3+b^3+c^3+$ec.$=-f^3+3fg-3h$. Imperciocchè, se si fa il cubo di $a+b+c+$ec, si troverà $(a+b+c+\text{ec.})^3=a^3+b^3+c^3+$ec.,$+3(a+b+c)\times(ab+ac+bc)$ $-3abc$. Ora, si ha $(a+b+c+\text{ec.})^3=-f^3$, $(a+b+c)\times(ab+ac+cb)=-fg$, $abc=-h$. Dunque avremo $-f^3=a^3+b^3+c^3+$ec.$-3fg+3h$; e per conseguenza $a^3+b^3+c^3+$ec.$=-f^3+3fg-3h$.

Così di seguito per le altre potenze delle radici.

8. TEOREMA II. *In ogni equazione che non contiene che radici reali.*

I.° *Se tutte le radici sono positive, i termini dell' equazione avranno alternativamente il segno + ed il segno —.*

II.° *Se tutte le radici sono negative, tutti i termini avranno il segno +.*

III.° *Se le radici sono in parte positive ed in parte negative: vi saranno tante radici positive quante* variazioni *di segni, e tante radici negative quante* permanenze *di segni, prendendo queste variazioni e queste permanenze da un termine al termine seguente, in tutta l'estensione dell'equazione.*

Sopra di che si deve osservare che, se l' equazione non fosse completa, bisognerebbe cominciare dal completarla.

La prima parte di questo teorema è evidente dall' equazione (A) dell' articolo 1, e la seconda lo è dall' equazione (B) dell' articolo medesimo.

Per dimostrare la terza, prendo per esempio l' equazione (C) del medesimo articolo, la quale ha due radici positive ed una negativa. Può accadere che sia $c>a+b$, ovvero $c<a+b$. Nel primo caso, il secondo termine è positivo: il terzo è negativo, perchè avendo $c>a+b$, si avrà $(a+b)c=(ac+bc)>(a+b)^2>ab$. E siccome l' ultimo termine è positivo, si vede che dal primo al secondo, vi è una permanenza di segni; che dal secondo al terzo, vi è una variazione di segni; e che dal terzo al quarto, vi è ancora una variazione di segni. Quindi vi sono, in tutto, due variazioni di segni ed una permanenza di segni; cioè a dire, tante variazioni quante sono le radici positive, e tante permanenze quante sono le radici negative. Nel secondo caso, il secondo termine dell' equazione è negativo; ed il terzo potrà essere positivo o negativo. Se questo termine è positivo, vi sarà dal primo al secondo una variazione di segni; dal secondo al terzo, ancora una variazione; e dal terzo al quarto, una

Si deve però osservare che la regola di cui trattasi, non ha luogo se non per le equazioni che hanno tutte le radici reali. Imperciocchè, per esempio, se si conchiudesse che l'equazione $xx+1=0$, ha le due radici negative, perchè tutti i suoi termini sono positivi, si sarebbe in errore, essendo le due radici dell'equazioni immaginarie.

10. TEOREMA III. *Ogni equazione può essere trasformata in un'altra, le cui radici siano maggiori o minori d'una quantità data.*

Sia un'equazione qualunque, di cui x è l'incognita, come per esempio, una delle equazioni dell' articolo 1: fate $x=z+m$ (essendo z una nuova incognita, m una quantità data, positiva o negativa); sostituite nel luogo delle potenze di x, i loro valori risultanti dall'ipotesi di $x=z+m$: avrete un'equazione, le cui radici saranno nel caso del teorema.

11. TEOREMA IV. *Ogni equazione può essere trasformata in un'altra, le cui radici siano eguali alle radici della prima, moltiplicate o divise per una quantità data.*

1.° Sia per esempio, l'equazione $t^3+at^2+bt+c=0$: se si fa $ft=x$, ossia $t=\frac{x}{f}$, si avrà la trasformata $x^3+fax^2+f^2bx+f^3c=0$, le cui radici sono i prodotti delle radici della proposta, moltiplicate per la quantità f.

Si scorge che per mezzo di questa trasformazione, un'equazione che contiene delle quantità frazionarie, può essere cambiata in un'altra che non ne contenga. Sia, per esempio, l'equazione $t^3+\frac{at^2}{g}+\frac{bt}{h}+\frac{d}{k}=0$: moltiplicato tutte pel prodotto

de' denominatori, ed avrete $ghk + hkat^2 + gkbt + ghd = 0$: in seguito fate $ghkt = x$, ossia $t = \frac{x}{ghk}$; avrete la trasformata $x^3 + hkax^2 + g^2k^2hbx + g^3h^3k^2d = 0$, nella quale non vi sono frazioni.

La medesima trasformazione può servire a fare sparire le quantità radicali che affettano alcuni termini d' un' equazione. Sia, per esempio, l' equazione $t^3 + at^2\sqrt{k} + bt + c\sqrt{k} = 0$: fate $t\sqrt{k} = x$; avrete la trasformata . . . . , ... $x^3 + akx^2 + bkx + ck^2 = 0$, nella quale non vi è alcuna quantità radicale.

2. Sia ancora, per esempio, l' equazione $t^3 + at^2 + bt + c = 0$: fate $\frac{t}{f} = x$; avrete la trasformata $x^3 + \frac{ax^2}{f} + \frac{bx}{f^2} + \frac{c}{f^3} = 0$, le cui radici sono eguali a quelle della proposta; divise per la quantità f.

Egli è chiaro che si può trasformare, coi medesimi mezzi, un' equazione in un'altra, le cui radici stiano a quelle della proposta, in qualsivoglia rapporto.

CAPO II.

Continuazione delle ricerche sopra la natura delle equazioni; metodi per trovare i divisori commensurabili che esse possono contenere.

12. Ogni equazione ha tante radici (4) quante sono le unità dell' esponente della più alta potenza dell' incognita. Queste radici sono suscettibili di diverse forme; e noi abbiamo già osservato non esservi per anche alcun metodo per trovarle generalmente, se non se pei quattro primi gradi. Ma vi sono in tutti i gradi, delle equazioni che possono essere risolute in altre equazioni del primo grado o del secondo o del terzo ec. Il nostro oggetto presente è d' indagare queste equazioni componenti che si chiamano *divisori razionali* o *commensurabili*, perchè non vi entra alcun radicale. Le loro dimensioni si deducono, al solito, da quelle dell' incognita che esse racchiudono. Ciò si deve intendere egualmente, tanto per le equazioni *letterali*, cioè a dire, per le equazioni, che, oltre l' incognita, contengono ancora altre lettere, quanto per le equazioni *numeriche*, cioè a dire, per le equazioni, che non contengono altra lettera fuor che l' incognita.

Si comprende l' utilità di questa ricerca. Imperciocchè, se un' equazione è intieramente risolubile in divisori d' una dimensione, si avranno immediatamente tutte le sue radici. Se ella è risolubile in divisori di due dimensioni, non si tratterà più, per avere le radici, che di risolvere delle equazioni del secondo grado. Se in divisori di tre dimensioni, si avranno le radici, risolvendo delle equazioni del terzo grado ec.

13. PROBLEMA I. *Risolvere una quantità razionale ne' suoi fattori razionali, allorchè ne contiene.*

Sia in generale una quantità razionale A, composta secondo una legge qualunque, da quante altre si vogliono quantità a, b, c, d ec. Se questa quantità è tale che, mettendo, per esempio, a in vece di b, o facendo $b=a$, sia $A=o$: dico che A sarà divisibile per $a-b$. Imperciocchè supponiamo che, dividendo A per $a-b$, si abbia Q per quoto, ed R per residuo: si avrà, dai primi principj della divisione, $A=Q(a-b)+R$. Ora, per ipotesi, quando $a=b$, si ha $A=o$; e si ha altresì allora $Q(a-b)=o$; dunque $R=o$.

Esempio I. *Riconoscere se la quantità o l'equazione* $4p^3-3b^2p-4a^3+3ab^2=o$, *abbia de' divisori razionali.*

Si scorge colla più leggiera attenzione, che facendo $p=a$, tutti i termini di questa quantità scambievolmente si distruggono. Quindi ella è divisibile $p-a$. Dunque, effettuando questa divisione, e riguardando p come incognita, l'equazione $4p^3-3b^2p-4a^3+3ab^2$, si risolverà in queste due; $p-a=o$, $4p^2+4ap+4a^2-3b^2=o$: una delle quali è del primo grado, l'altra del secondo.

Similmente si troverà che $4p^3-3p+2=(2p-1)\times(2p^2+p-2)$; che $4p^3+6p-10=(p-1)\times(4p^2+4p+10)$; che $4p^3+3p-7=(p-1)\times(4p^2+4p+7)$; che $4p^3-6p+2=(p-1)\times(4p^2+(4p-2)$.

Esempio II. *Riconoscere se la quantità* $2l^6-2l^2m^2n^2-l^4m^2+m^4n^2+m^2n^4$, *abbia de' divisori razionali.*

Osservo che supponendo $l^2=mn$, questa quantità svanirebbe. Onde ne concludo che essa è divisibile per l^2-mn, o per $-l^2+mn$. Vedo parimente che facendo $l^2=-mn$, la nostra quantità svanirebbe. Onde ne conludo che essa è ancora divisibile per $-l^2+mn$, o per $-l^2-mn$. Effettuando successivamente queste due divisioni, si troverà il terzo fattore $2l^2-m^2-n^2$; fattore che si avrebbe potuto altresì

trovare direttamente come gli altri due. Quindi, la quantità proposta $2l^6-2l^2m^2n^2-l^4m^2-l^4n^2+m^4n^2+m^2n^4=(-l^2+mn)\times(-l^2-mn)\times(2l^2-m^2-n^2)$.

Esempio III. *Riconoscere se l' equazione* $x^4-2cfx^3+2cfga^2x-g^2a^4=0$, *abbia de' divisori razionali.*

Osservo che facendo $x^2=ga^2$, il primo termine di questa equazione è distrutto dal quarto, ed il secondo dal terzo. Dunque ella è divisibile per x^2-ga^2; e per conseguenza è risolubile in queste due equazioni del secondo grado, $x^2-ga^2=0$; $x^2-2cfx+ga^2=0$.

14. SCOLIO I. Poichè l' ultimo termine d' un' equazione che è ordinata per rapporto all' incognita, e che ha zero per secondo membro, non è altra cosa (4) che il prodotto di tutte le radici; e che il carattere d' una radice è (1) che sostituendola in luogo dell' incognita, la totalità dei termini dell' equazione svanisce: ne segue che se fra i divisori dell' ultimo termine, se ne trovino alcuni che abbiano questo carattere, essi saranno radici dell' equazione. Quindi l' equazione sarà divisibile per l' incognita, più o meno ciascuno dei divisori che avrà la proprietà di cui abbiamo parlato. Sia, per esempio, l' equazione $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$, il cui ultimo termine abc ha i tre divisori a, b, c: Io vedo che sostituendo successivamente ciascuno di questi divisori in luogo dell' incognita, la somma di tutt' i termini svanisce. Onde ne concludo che ciascuno di essi è un valore o radice dell' incognita; e che per conseguenza l' equazione può essere riguardata come composta dai tre fattori o divisori d' una dimensione, $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$.

Sia, per secondo esempio, l' equazione $x^3-(a-b-c)x^2+(bc-ab-ac)x-abc=0$, il cui ultimo termine abc ha i tre divisori a, b, c. So-

stituendo primieramente a in vece di x, la somma di tutti i termini diventa zero; e per conseguenza $x-a=0$, è uno dei divisori dell'equazione. Se in seguito si sostituisce b in vece di x, la somma di tutti i termini non svanisce; ma sostituendo $-b$ in vece di x, ella svanisce; e per conseguenza $x+b=0$, è un secondo divisore dell'equazione. Similmente si troverà che $x+c=0$, ne è un terzo divisore.

Quindi egli è chiaro che si troveranno sempre i divisori d'una dimensione contenuti in un'equazione, se si cerchino tutt'i divisori dell'ultimo termine, e si scelgano tra questi divisori quelli, che essendo sostituiti, tanto in $+$ che in $-$, in luogo dell'incognita, fanno sparire tutti i termini dell'equazione.

Suppongo sempre che l'equazione ordinata per rapporto all'incognita non abbia altro coefficiente che l'unità nel primo termine, e che non contenga alcuna frazione: forma alla quale si può ridurre (11) ogni equazione, se ella non l'ha primitivamente.

Esempio I. *Si domanda se l'equazione* $x^3+5x^2-44x+60=0$, *abbia de' divisori commensurabili.*

Tutti i divisori dell'ultimo termine 60 sono 1. 2. 3. 4. 5. 6. 10. 12. 15. 20. 30. 60. Trovo primieramente che facendo $x=2$, tutti i termini dell'equazione si distruggono; dunque l'equazione è divisibile per $x-2=0$. In secondo luogo, trovo che facendo $x=3$, tutti i termini svaniscono ancora; dunque l'equazione è divisibile per $x-3=0$. In terzo luogo, trovo che facendo $x=-10$, tutti i termini si distruggono; dunque l'equazione è divisibile per $x+10=0$. Ella adunque può essere considerata come il prodotto delle tre equazioni del primo grado, $x-2=0$, $x-3=0$, $x+10=0$.

Esempio II. *Si domanda se l'equazione* x^4-

$5x^3-24x^2+100x+48=0$, *abbia de' divisori commensurabili.*

Tutti i divisori dell' ultimo termine 48 sono 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 16. 24. 48. Ora io trovo 1.° che facendo $x=4$, tutti i termini si distruggono; dunque l' equazione è divisibile per $x-4=0$. In secondo luogo, trovo che facendo $x=6$, tutt' i termini si distruggono ancora; dunque l' equazione è divisibile per $x-6=0$. Non vi è alcun altro divisore di 48, che produca la distruzione de' termini dell' equazione. Ella dunque ha per divisori d' una dimensione, soltanto $x-4=0$, $x-6=0$. Dividendola successivamente per questi due divisori, si troverà per quoto l' equazione del secondo grado $x^2+5x+2=0$. Dunque l' equazione proposta può essere considerata come il prodotto delle tre equazioni $x-4=0$, $x-6=0$, $xx+5x+2=0$.

15. SCOLIO II. Newton propone il mezzo seguente per abbreviare la ricerca de' divisori dell' ultimo termine d' un' equazione numerica, che essendo sostituiti in luogo dell' incognita, possono fare sparire tutti i termini dell' equazione; o che essendo congiunti in $+$ o in $-$ coll' incognita, possono formare de' divisori dell' equazione.

Sia un' equazione qualunque, per esempio, questa: $t^3+at^2+bt+c=0$. Egli è chiaro che supponendo $t=x+m$, l' ultimo termine della trasformata in x sarà m^3+am^2+bm+c, cioè a dire, la proposta stessa, nella quale si fosse posto m in vece di t. Dunque facendo successivamente $t=x+1$, $t=x$, $t=x-1$, l' ultimo termine di ciascuna trasformata in x sarà $1+a+b+c$, ovvero c, o pure $-1+a-b+c$. Ciò posto, siccome in questa ipotesi si ha successivamente $x=t-1$, $x=t$, $x=t+1$; così si vede che affinchè l' equazione proposta possa avere de' divisori d' una dimensione, fa d' uopo che le tre quantità $1+a+b+c$, c, $-1+a-b+c$, abbiano

de' divisori che formino la progressione aritmetica $\div (t-1) : t : (t+1)$, la cui differenza è 1. Inoltre, si vede che questa progressione è crescente, quando il valore di t è positivo: e decrescente allorchè essendo negativo il valore di t si considerano semplicemente i valori assoluti de' tre termini della progressione, fatta astrazione da' loro segni; dunque reciprocamente, bisognerà prendere il divisore di c positivamente o negativamente, secondo che i valori assoluti de' tre termini che formano la progressione de' divisori, andranno salendo o discendendo.

Egli è inutile di sottomettere all' esame i divisori di c, che non soddisfacessero a queste condizioni; e quegli stessi che vi soddisfano, possono altronde non avere la proprietà ricercata.

Esempio I. *Si domanda se l' equazione* $t^3 - 5t^2 - 18t + 72 = 0$; *abbia de' divisori commensurabili*

L' ultimo termine della prima trasformata in x, ossia dell' equazione, che viene, facendo $t = x + 1$, è $1 - 5 - 18 + 72 = 50$; quello della seconda nella quale $t = x$, è 72; quello della terza, nella quale $t = x - 1$, è $-1 - 5 + 18 + 72 = 84$. Colloco questi tre termini 50, 72, 84, nella medesima colonna verticale; ed a canto di essi i loro divisori che formano tre file orizzontali. L' operazione figurata si vede qui sotto.

50	1. 2. 5. 10. 25. 50.
72	1. 2. 3. 4. 6. 8. 9. 12. 18. 24. 36. 72.
84	1. 2. 3. 4. 6. 7. 12. 14. 21. 28. 42. 84.

Ciò posto, trovo primieramente nelle tre file orizzontali i tre divisori 1, 2, 3, che formano una progressione aritmetica crescente, la cui differenza è 1: e per conseguenza bisogna provare se

il divisore medio 2, preso positivamente, e sostituito in vece di t nell' equazione proposta produca la distruzione di tutti i suoi termini. Ora si trova che questa distruzione non ha luogo, onde ne concludo che l' equazione non è divisibile per $t-2$.

I tre divisori 2, 3, 4 formano una progressione aritmetica crescente, la cui differenza è 1; quindi bisogna provare il divisore medio $+3$. Ora mettendo questo numero in vece di t, tutti i termini dell' equazione si distruggono, ossia ella è divisibile per $t-3$.

I tre divisori 5, 4, 3 formano una progressione aritmetica decrescente, la cui differenza è 1: dunque bisogna provare -4. Ora, mettendo questo numero in vece di t, tutti i termini dell' equazione si distruggono, ossia, ella è divisibile per $t+4$.

I tre divisori 5, 6, 7 formano una progressione aritmetica crescente, la cui differenza è 1, dunque bisogna provare $+6$. Ora, mettendo questo numero in vece di t, tutti i termini dell' equazione si distruggono, ossia, ella è divisibile per $t-6$.

Da ciò si vede che l' equazione proposta non è altra cosa che il prodotto $(t-3)\times(t+4)\times(t-6)=0$.

Esempio II. *Si domanda se l' equazione* $t^5-12t^4+5t^3-61t^2+22t-120=0$, *abbia de' divisori commensurabili.*

Il metodo è lo stesso come nell' esempio precedente. L' ultimo termine della prima trasformata in x, ove $t=x+1$, è -165; quello della seconda, ove $t=x$, è -120; e quello della terza, ove $t=x-1$, è -221. Scrivo i tre numeri 165, 120, 221 in una colonna verticale, ed a canto di essi i loro divisori che formano tre file orizzontali; il tutto come quì si vede.

165	1. 3. 5. 11. 15. 33. 55. 165.
120	1.2.3.4.5.6.8.10.12.15.20.24.30.40.60.120
221	1. 13. 17. 221.

Ciò posto; trovo primieramente i tre divisori 3, 2, 1, che formano una progressione aritmetica decrescente, la cui differenza è 1. Bisogna dunque provare se -2, posto in vece di t, produca la distruzione di tutti i termini dell' equazione: ora ciò non succede; dunque l' equazione non è divisibile per $t+2$.

I tre divisori 11, 12, 13, formano una progressione aritmetica crescente, la cui differenza è 1. Quindi bisogna provare se $+12$, posto in vece di t, produca la distruzione di tutti i termini dell' equazione; ovvero, ciò che sarà più breve, si proverà a dividere l' equazione per $t-12$; e siccome la divisione riesce esatta, si vede che l' equazione ha $t-12$ per divisore commensurabile. Essa non ha alcun altro divisore d' una dimensione.

Dividendo l' equazione proposta per $t-12=0$, si troverà l' equazione $t^4+5t^2-t+10=0$, che non è più se non se del quarto grado, e che si risolverà colle formole di questo grado.

16. SCOLIO III. Passo ad un altro metodo che chiamasi ordinariamente il *metodo de' coefficienti indeterminati*, e che è d' un uso facile e comodo nella pratica. Si è già adoprato (Algeb. 191 e 193) un simil mezzo per determinare i coefficienti della formola che risulta allorchè s' innalza un binomio ad una potenza frazionaria positiva o negativa. Questo metodo si applica qui egualmente ai divisori razionali d' ogni sorta di dimensioni: ma basterà di spiegarlo pei divisori d' una dimensione, o di

due dimensioni; i nostri Lettori lo estenderanno senza difficoltà ai divisori più elevati.

17. PROBLEMA II. *Trovare col metodo de' coefficienti indeterminati, i divisori d' una dimensione che possono essere contenuti in una equazione.*

Sia l' equazione $t^4+at^3+bt^2+ct+d=0$, che è supposta contenere un divisore d' una dimensione. Essendo questa equazione del quarto grado, io posso considerarla come il prodotto dell' equazione del terzo grado $t^3+At^2+Bt+C=0$ per l' equazione del primo grado $t+D=0$, essendo A, B, C, D quantità indeterminate che si troveranno coll' identificare termine per termine l' equazione risultante $(t^3+At^2+Bt+C)\times(t+D)=0$, ossia $t^4+(A+D)t^3+(B+DA)t^2+(C+DB)t+CD=0$, coll' equazione proposta $t^4+at^3+bt^2+ct+d=0$. Si avrà dunque $A+D=a$, $B+DA=b$, $C+DB=c$, $CD=d$. Queste quattro ultime equazioni contengono tutto ciò che bisogna per determinare le quattro incognite A, B, C, D nella supposizione che essendo D una quantità razionale, l' equazione proposta sia divisibile per l' equazione del primo grado $t+D=0$.

In fatti, noi vediamo dall' equazione $CD=d$, che le due quantità C e D devono essere divisori di d, poichè il loro prodotto CD è d. Per la qual cosa risolviamo la quantità d in tutti i suoi fattori; e supponendo che D sia uno di questi fattori, e C il prodotto di tutti gli altri, esaminiamo se questo fattore D ha le condizioni richieste affinchè si abbiano le tre altre equazioni $A+D=a$, $B+DA=b$, $C+DB=c$. L' equazione $A+D=a$, dà $A=a-D$, quantità nota, poichè a è data, e D è un fattore noto di d. L' equazione $B+DA=b$, dà $B=b-DA$, quantità parimente nota. L' equazione $C+DB=c$, dà $C=c-DB$. Questo valore di C, che è noto, deve essere identico con quello che risulta dalla

divisione di d per D, affinchè l'equazione proposta $t^4+at^3+bt^2+ct+d=o$, sia divisibile per $t+D$. Se questa identità non ha luogo, si proverà un altro divisore; e se con tutte queste prove non si trovano i due medesimi valori per C, si concluderà che l'equazione t^4+at^3+ec. non ha alcun divisore razionale d'una dimensione. Si devono provare i divisori D col prenderli positivamente o negativamente.

Egli è chiaro che se $t\pm D$ è effettivamente divisore di t^4+at^3+ ec., si conosceranno dalle operazioni che si sono fatte per provare D, le quantità A, B, C, e per conseguenza i coefficienti de' termini dell'equazione del terzo grado $t^3+At^2+Bt+C=o$, che è una delle componenti dell' equazione del quarto t^4+at^3+ec.

Se l'equazione $t^3+At^2+Bt+C=o$, è supposta contenere un divisore d'una dimensione, esso, si troverà considerando questa equazione come il prodotto d'un' equazione del secondo grado per una equazione del primo. Medesima osservazione per l'equazione del secondo grado.

Se un equazione del quinto grado contiene un divisore d'una dimensione, esso si troverà considerando questa equazione come composta d'un' equazione del quarto grado, e d'un equazione del primo. Così delle altre.

Esempio. *Risolvere l'equazione* $q^n-\frac{sq^{n-1}}{s-a}+\frac{a}{s-a}=o$, *che nasce dalla sostituzione di* $\frac{1}{q}$ *in vece di* r, *nell'equazione* $ar^n-a-rs+s=o$, *trovata* (Algeb. 144 Quest. IX.); *supponendo* . . . . $a=54$, $s=80$, $n=4$.

La questione di cui si tratta, consiste in gene-

rale, a trovare, in una progressione geometrica decrescente, la ragione e l' ultimo termine, allorchè si conoscono il primo termine, la somma ed il numero de' termini della progressione. Nel caso presente, il primo termine è 54, il numero de' termini è 4, la somma della progressione è 80; e si domanda la ragione q, cioè a dire, la risoluzione dell' equazione:

$$q^4 - \frac{80q^3}{26} + \frac{54}{26} = 0, \text{ ossia } q^4 - \frac{40q^3}{13} + \frac{27}{13} = 0,$$

nella quale q è l' incognita. Cerchiamo pertanto col metodo precedente, se questa equazione contenga qualche divisore razionale d' una dimensione.

Siccome questa stessa equazione ha de' termini frazionarj, così la trasformo (11) in un' altra che non ne contenga, facendo $q = \frac{t}{13}$; il che mi dà $t^4 - 40t^3 + 27.(13)^3 = 0$. Allora si ha un' equazione che si riferisce alla formola $t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = 0$, con fare $a = -40$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 27.(13)^3$. Dunque l' equazione da risolversi è $t^4 - 40t^3 + 27.(13)^3 = 0$.

Tutti i divisori dell' ultimo termine $27.(13)^3$ sono 1, 3, 9, 27, 13, $(23)^2$, $(13)^3$, 3.13, 3.$(13)^2$, 3.$(13)^3$, 9.13, 9.$(13)^2$, 7.$(13)^3$, 27.13, 27.$(13)^2$, 27.$(13)^3$. Primieramente la supposizione di D$=\pm 1$, non soddisfa: possiamo assicurarcene col metodo del presente articolo, ma sarà più breve l' adoperare per ciò il metodo dell' articolo (14), perchè tutte le potenze di t essendo t; si vede, quasi senza calcolo, se la totalità de' termini dell' equazione si riduca a zero.

Supponendo D$=3$, e conseguentemente in primo luogo C$=\frac{d}{D}=9.(13)^3$, avremo A$=-43$,

$B=+129$, $C=\frac{d}{D}=-587$; e siccome i due valori di C non sono i medesimi, dobbiamo conchiudere che l'equazione non è divisibile per $t+3$. Si troverà altresì che ella non è divisibile per $t-3$.

Supponendo $D=13$, e conseguentemente in primo luogo $C=27.(13)^2$, avremo $A=-53$, $B=+13.53$, $C=-53.(13)^2$; onde si vede che questa supposizione deve essere rigettata; poichè i due valori di C non sono i medesimi.

Se si supponesse $D=-13$, e conseguentemente in primo luogo $C=-27.(13)^2$, si avrebbe .... $A=-27$, $B=-27.13$, $C=-27.(13)^2$; dunque i due valori di C sono i medesimi, e per conseguenza l'equazione è divisibile per $t-13$; ma questa supposizione deve essere ancora rigettata, perchè darebbe $i=13$, $q=i$, ciascun termine della serie $=54$, $s=4\times54$, e non $s=80$.

Supponiamo $D=-3.13$, e conseguentemente in primo luogo $C=-9.(13)^2$; avremo $A=-1$, $B=-3.13$, $C=-9.(13)^2$; dunque i due valori di C sono i medesimi, e per conseguenza l'equazione è divisibile per $t-3.13$; il che dà $i=3.13$, $q=3$. Questo valore di q soddisfa alle condizioni della questione proposta; difatti, i quattro termini della progressione sono allora 54, 18, 6, 2, e la loro somma è 80.

18. PROBLEMA III. *Trovare col medesimo metodo i divisori di due dimensioni che possono essere contenuti in un' equazione.*

Sia l'equazione $t^4+at^3+bt^2+ct+d=0$. Suppongo che questa equazione sia il prodotto de' due fattori del secondo grado $t^2+mt+n=0$, $t^2+pt+q=0$. Questi due fattori moltiplicati insieme danno

$$t^4 \left.\begin{matrix}+m\\+p\end{matrix}\right\} t^3 \left.\begin{matrix}+n\\+mp\\+q\end{matrix}\right\} t^2 \left.\begin{matrix}+np\\+mq\end{matrix}\right\} t + nq = 0\,;$$

equazione, i cui termini devono essere i medesimi di quelli della proposta. Quindi n e q devono essere divisori di d; cosicchè una di queste due lettere n, q essendo considerata come cognita, lo sarà altresì l'altra. Paragoniamo termine con termine questa equazione e la proposta: avremo . . . $m+p=a$, $n+mp+q=b$, $np+mq=c$, $nq=d$. La prima è la terza di queste equazioni danno . . . $m=a-p$; $m=\frac{c-np}{q}$, ossia (mettendo in vece di q il suo valore $\frac{d}{n}$ dato dalla quarta equazione) $m=\frac{cn-n^2p}{d}$. Uguagliando tra loro i due valori di m, si avrà $a-p=\frac{cn-n^2p}{d}$. Dunque . . . $p=\frac{ad-nc}{d-n^2}$, ed $m=\frac{nc-an^2}{d-n^2}$. Questi due valori di p e di m devono essere tali che la seconda equazione $n+mp+q=b$ abbia luogo nel medesimo tempo.

Se nelle applicazioni numeriche di queste formole, si trovassero per m e p de' numeri frazionarj, bisognerebbe rigettare le supposizioni che gli avessero fatti nascere, perchè i numeri a,b,c,d,m,n,p,q, sono numeri interi, o direttamente o per le trasformazioni delle equazioni.

Esempio. *Si domanda se l'equazione* $t^4+5\,t^3$

$+14t^2+19t+15=0$, *abbia de' divisori di due dimensioni.*

Questa equazione si riferisce alla formola $t^4+at^3+bt^2+ct+d=0$, col fare $a=5$, $b=14$, $c=19$, $d=15$. I divisori dell'ultimo termine 15 sono . . . 1, 3, 5, 15.

Supponiamo $n=1$; e per conseguenza $q=15$; si avrà $p=4$, $m=1$; di più si dovrebbe avere $1+4+15=14$, il che non è; onde ne concludo che questa supposizione deve essere rigettata.

Supponiamo $n=3$, e per conseguenza $q=5$; si avrà $p=3$, $m=2$; di più si deve avere $3+6+5=14$; il che è vero; dunque la supposizione è vera. Sostituendo pertanto in vece di m, p, n, q, i loro valori nelle equazioni componenti . . . . . $t^2+mt+n=0$, $t^2+pt+q=0$, esse diverranno . . . . . $t^2+2t+3=0$, $t^2+3t+5=0$, e saranno ciascuna un divisore di due dimensioni dell'equazione proposta $t^4+5t^3+14t^2+19t+15=0$.

CAPO III.

Delle equazioni che contengono radici eguali.

19. Vi sono delle equazioni che contengono più radici eguali e col medesimo segno. Per esempio, l'equazione $(t-a)\times(t-a)\times(t-b)\times(t+c)=0$, ha le prime due radici eguali e positive. Il metodo per trovare direttamente e separatamente queste sorti di radici, è fondato sopra alcuni nuovi principj che prendiamo a stabilire.

20. TEOREMA I. *Se si svolge la potenza* n *d'un binomio* h + t, *cioè a dire*, $(h+t)^n$, *e si moltiplica la medesima, termine per termine, per la progressione aritmetica* 0, 1, 2, 3, 4, ec.: *il prodotto sarà* $= n\,t\,(h+t)^{n-1}$.

Questo teorema è evidente dal calcolo che segue:

$$(h+t)^n = h^n + nh^{n-1}t$$

$$+\frac{n(n-1)h^{n-2}t^2}{1.\ 2}+\frac{n(n-1)(n-2)h^{n-3}t^3}{1.\ 2.\ 3}+\text{ec.}$$

$$0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad \text{ec.}$$

$$\text{Prodotto} = nh^{n-1}t$$

$$+\frac{n(n-1)h^{n-2}t^2}{1}+\frac{n(n-1)(n-2)h^{n-3}t^3}{1.\ 2.\ 3}+\text{ec.}$$

$$= nt\left(h^{n-1}+(n-1)h^{n-2}t+\frac{(n-1)(n-2)h^{n-3}t^2}{1.\ 2}+\text{ec.}\right)$$

$$= nt\,(h+t)^{n-1}$$

21. COROLLARIO. I. Di qui ne segue che moltiplicando la potenza $(h+t)^n$ sviluppata, per la progressione $0k$, $1k$, $2k$, $3k$, $4k$ ec.; il prodotto sarà $= k\,n\,t\,(h+t)^{n-1}$. Imperciocchè moltiplicare per $0k$, $1k$, nk, $3k$, $4k$ ec, è moltiplicare prima per 0, 1,

2, 3, ec. il che dà $n t (h+t)^{n-1}$; ed in seguito moltiplicare il tutto per k, il che dà $k n t (h+t)^{n-1}$.

Se si avesse $M (h \pm t)^n$ (essendo M un fattore qualunque), e che dopo avere svolta la potenza $(h+t)^n$, si moltiplicasse per la progressione aritmetica $0k$, $1k$, $2k$, $3k$, ec.: il prodotto sarebbe $M k n t (h+t)^{n-1}$, come è evidente.

22. COROLLARIO II. Ne segue ancora, che se si ha $M (h + t)^n$, e che dopo avere svolta la potenza $(h+t)^n$, si moltiplica per la progressione aritmetica qualunque m, $m+k$, $m+2k$, $m+3k$, ec.: il prodotto sarà$=(M m h+M m t+M k n t)(h+t)^{n-1}$. Difatti, moltiplicare per la progressione m, $m+k$, $m+2k$, $m+3k$ ec. è moltiplicare prima per m, il che dà $M m (h+t)^n = (M m h + M m t) \times (h+t)^{n-1}$; ed in seguito per la progressione $0k$, $1k$, $2k$, $3k$, ec., il che dà $M k n t (h+t)^{n-1}$. Dunque il prodotto totale $= (M m h + M m t + M k n t) . (h+t)^{n-1}$.

23. TEOREMA II. *Se si moltiplicano i termini d'un' equazione che contiene delle radici eguali, per quelli d'una progressione aritmetica qualunque, il prodotto sarà un' equazione che conterrà le medesime radici eguali, meno una.*

Difatti, sia l'equazione $0 = a \pm b t + c t^2 + d t^3$ ec. (essendo t l'incognita, a, b, c, ec. delle quantità date, la quale è supposta contenere un numero n di radici eguali che rappresenta ciascuna con $-h$, ed essere per conseguenza divisibile per $(h+t)^n$. Questa equazione può inoltre contenere un numero qualunque d'altre radici. Egli è chiaro che possiamo scriverla così; $0 = (h + t)^n \times (p + qt + rt^2 + st^3 + \text{ec})$ supponendo che il fattore $p + qt + rt^2 + \text{ec.}$, nel quale p, q, r, ec. sono quantità date, rappresenti il quoto che si troverebbe se si dividesse l'equazione proposta per$(h+t)^n$. Dunque effettuando la moltiplica indicata avremo $0=p (h+t)^n + qt (h+t)^n + r t^2 (h + t)^n + st^3 (h+t)^n$

$+$ ec., ovvero svolgendo la potenza $(h+t)^n$, ed ordinando per rapporto a t.

$$
0 = \left\{
\begin{array}{l}
ph^n + pnh^{n-1}t \\
+ \dfrac{pn(n-1)h^{n-2}t^2}{1.\ 2} + \dfrac{pn(n-1)(n-2)h^{n-3}t^3}{1.\ 2.\ 3} + \text{ec.} \\
+ qh^n t + qnh^{n-1}t^2 + \dfrac{qn(n-1)h^{n-2}t^3}{1.\ 2} + \text{ec.} \\
\qquad + rh^n t^2 \quad + \quad rnh^{n-1}\,t^3 + \text{ec.} \\
\qquad\qquad\qquad + \quad s\,h^n\,t^3 + \text{ec.}
\end{array}
\right.
$$

Scriviamo adesso sotto queste serie la progressione aritmetica,

$$m,\ m + k,\ m + 2k,\ m + 3k,\ \text{ec.};$$

e moltiplichiamo ciascuna fila orizzontale per la progressione aritmetica corrispondente; cioè a dire la prima fila, per la progressione aritmetica intiera m, $m + k$, $m + 2k$, $m + 3k$, ec.; la seconda, per la progressione $m + k$, $m + 2k$, $m + 3k$, ec.; la terza, per la progressione $m + 2k$, $m + 3k$, ec.; così di seguito. Egli è evidente che con ciò si sarà moltiplicata l'equazione proposta per la progressione aritmetica m, $m + k$, $m + 2k$, $m + 3k$, ec; poichè la prima colonna verticale è moltiplicata per m; la seconda colonna verticale, per $m + k$; la terza colonna verticale, per $m + 2k$, ec. Ora avanti la moltiplica di ciascuna fila orizzontale per la progressione aritmetica corrispondente, questa fila era divisibile per $(h+t)^n$. Dunque (21) dopo la moltiplica, ciascuna fila sarà divisibile per $(h+t)^{n-1}$; e per conseguenza l'equazione risultante da questa moltiplica sarà altresì divisibile per $(h+t)^{n-1}$. Quindi si avrà un'equazione che conterrà le medesime radici eguali, meno una dell'equazione proposta.

24. Osservazione. Può succedere che un' equazione contenga più radici eguali di specie differenti. Tale è, per esempio, l' equazione $(t-a)^2 \times (t-b)^3 \times (t-c) = 0$, che, oltre la radice c, ha due radici, ciascuna delle quali vale, a, e due radici, ciascuna delle quali vale b. Supponiamo, in generale, che un' equazione di cui t è l' incognita, contenga nel medesimo tempo un numero n di radici eguali, rappresentate ciascuna da $-h$; un numero e di radice eguali, rappresentate ciascuna da $-f$; un numero g di radici eguali, rappresentate ciascuna da $-l$; ec. Se si moltiplicano i termini di questa equazione per quelli di una progressione aritmetica qualunque, il prodotto sarà un' equazione che conterrà le medesime radici eguali, meno una, di ciascuna specie, o che sarà divisibile per $(h+t)^{n-1} \times (f+t)^{e-1} \times (l+t)^{g-1} \times$ ec. Imperciocchè, se si suppone che l'equazione generale dell' articolo precedente contenga le potenze $(h+t)^n$, $(f+t)^e$, $(l+t)^g$, ec.; e si consideri successivamente il prodotto di tutte queste potenze, meno una, come incluso nel fattore $p + qt + rt^2 + st^3$ + ec.; si vedrà che moltiplicando pei termini d' una progressione aritmetica; si avrà un' equazione che sarà divisibile, o per $(h+t)^{n-1}$, o per $(f+t)^{e-1}$, o per $(l+t)^{g-1}$, ec.; Onde ne segue che questa equazione sarà divisibile pel prodotto $(h+t)^{n-1} \times (f+t)^{e-1} \times (l+t)^{g-1} \times$ ec.

25. SCOLIO. Siamo adesso in istato di giudicare se un' equazione proposta contenga delle radici eguali, e di determinare queste radici. Per ciò, dopo avere ordinata l'equazione per rapporto all'incognita, la moltiplicheremo, termine per termine, per una progressione aritmetica. Se l' equazione non fosse completa, bisognerebbe cominciare a completarla, immaginando che le potenze dell' incognita, che mancano, siano moltiplicate per zero. Così, per

l' equazione $o = c + a\,t^2 + t^5$, che non ha nè secondo, nè quarto, nè quinto termine, si scriverebbe, $o = c \pm o\,t + a\,t^2 \pm o\,t^3 \pm o\,t^4 + t^5$. La scelta della progressione aritmetica è arbitraria; ma per maggiore semplicità ne' risultati, si deve prendere la più semplice delle progressioni aritmetiche, ch' è 1, 2, 3, 4, ec. Effettuando la moltiplica che abbiamo indicata, si avrà una nuova equazione che chiamo *secondaria*, e che contiene le radici eguali, meno una, dell' equazione principale, supposto che effettivamente l' equazione principale contenga di siffatte radici. Si cercherà col metodo dell' articolo 72, il massimo comun divisore di queste due equazioni ordinate per rapporto all' incognita. Se esse non hanno veruna equazione per comun divisore, si concluderà che l'equazione principale non contiene radici eguali. Se hanno un tal divisore, l' equazione principale avrà alcune radici eguali; ed ecco i differenti casi che potranno accadere.

1. Se il massimo comun divisore è un equazione del primo grado, l' equazione principale ha due radici eguali, ciascuna delle quali è questo stesso divisore.

2. Se il massimo comun divisore è un' equazione del secondo grado, si risolverà questo divisore nelle sue radici; e se esse sono eguali, l' equazione principale ha tre radici eguali, ciascuna delle quali è una delle radici del divisore: se le radici del divisore sono disuguali, l' equazione principale ha due radici eguali d' una specie e due radici eguali d' un' altra specie: una delle radici eguali della prima specie è una delle radici del divisore, ed una delle radici eguali della seconda specie, è l' altra radice del divisore.

3.° Se il massimo comun divisore è un'equazione del terzo grado, si cercheranno le tre sue ra-

dici: se queste tre radici sono eguali, l'equazione principale contiene quattro radici, eguali ciascuna ad una delle tre radici del divisore: se soltanto due radici del divisore sono eguali, l'equazione principale contiene tre radici eguali d'una specie, le quali sono ciascuna una delle due radici eguali del divisore, e due radici eguali d'una seconda specie, le quali sono ciascuna la terza radice del divisore: se le tre radici del divisore sono disuguali, l'equazione principale contiene due radici eguali d'una prima specie, le quali sono ciascuna la prima radice del divisore; due radici eguali d'una seconda specie, le quali sono ciascuna la seconda radice del divisore; e due radici eguali d'una terza specie, le quali sono ciascuna la terza radice del divisore. Così di seguito.

Esempio I. *Si domanda se l'equazione* $t^3-t^2-8t+12=0$, *abbia delle radici eguali*.

Moltiplico, termine per termine, questa equazione, per la progressione aritmetica 3, 2, 1, 0; il che produce l'equazione secondaria $3t^3-2t^2-8t=0$, ovvero (dividendo tutto per la radice $t=0$) $3t^2-2t-8=0$. Cerco il massimo comun divisore dell'equazione principale e dell'equazione secondaria. Questo divisore è $t-2$. Onde ne segue che l'equazione proposta ha due radici eguali espresse da $t=2$, $t=2$. Da queste due radici risulta l'equazione $(t-2)\times(t-2)=0$, ossia $t^2-4t+4=0$, per la quale dividendo l'equazione data $t^3-t^2-8t+12=0$, si ha per quoto $t+3=0$. Quindi le tre radici dell'equazione $t^3-t^2-8t+12=0$, sono $t=2$, $t=2$, $t=-3$.

Esempio II. *Si domanda se l'equazione* $t^4-3t^3-6t^2+28t-24=0$, *abbia delle radici eguali*.

Moltiplico questa equazione per la progressione

aritmetica 4, 3, 2, 1, 0; e divido tutto per la radice t; il che dà l'equazione secondaria $4t^3-9t^2-12t+28=0$. In seguito cerco il massimo comun divisore dell'equazione principale e dell'equazione secondaria. Questo divisore è l'equazione del secondo grado $t^2-4t+4=0$, che contiene le due radici eguali $t=2$: $t=2$. Onde ne concludo che l'equazione proposta ha tre radici eguali, di cui ciascuna vale 2. Da queste tre radici risulta l'equazione $(t-2)\times(t-2)\times(t-2)=0$, ossia $t^3-6t^2+12t-8=0$, per la quale dividendo l'equazione $t^4-5t^3-6t^2+28t-24=0$, si ha per quoto $t+3$. Quindi le quattro radici dell'equazione proposta sono $t=2$, $t=2$, $t=2$, $t=-3$.

Esempio III. *Si domanda se l'equazione* $t^4-10t^3+37t^2-60t+36=0$, *abbia delle radici eguali.*

Avendo moltiplicata questa equazione per la progressione aritmetica 4, 3, 2, 1, 0, il che dà l'equazione secondaria $4t^3-30t^2+74t-60=0$; cerco il massimo comun divisore di questa equazione e dell'equazione principale. Questo divisore è l'equazione del secondo grado $t^2-5t+6=0$, la quale dà le due radici disuguali $t=2$, $t=3$. Laonde conchiudo che l'equazione proposta $t^4-10t^3+37t^2-60t+36=0$, ha due radici eguali ciascuna delle quali vale 2, e due radici eguali ciascuna delle quali vale tre. Difatti, questa equazione non è altra cosa che $(t-2)^2\times(t-3)^2=0$.

Esempio IV. *Si domanda se l'equazione* $t^5-13t^4+67t^3-171t^2+216t-208=0$, *abbia delle radici eguali.*

Formiamo al solito, l'equazione secondaria $5t^4-52t^3+201t^2-342t+216=0$, moltiplicando l'equazione proposta per la progressione aritmetica 5, 4, 3, 2, 1, 0. Cerchiamo il massimo comun divisore dell'equazione principale e dell'equazione

secondaria. Questo divisore è l' equazione del terzo grado $t^3 - 8t^2 + 21t - 18 = 0$. Ora si trova sempre coi medesimi mezzi, che questa equazione contiene le due radici eguali $t=3$, $t=3$, e la terza radice $t=2$. Quindi l' equazione proposta $t^5 - 13t^4 + 67t^3 - 171t^2 + 216t - 108 = 0$, ha tre radici eguali di cui ciascuna vale 3, e due radici eguali di cui ciascuna vale 2. Difatti questa equazione non è altra cosa che $(t-3)^3 \times (t-2)^2 = 0$.

CAPO IV.

Metodi per risolvere, per approssimazione le Equazioni numeriche di tutti i gradi.

26. L'arte di approssimarsi alle radici d'una equazione, quando non si può trovarle esattamente, è un felice supplemento all' imperfezione de' metodi rigorosi. Esso è fondato sopra alcune proposizioni generali che bisogna primieramente stabilire.

27. TEOREMA. *Se sostituendo in un' equazione qualunque due numeri differenti, in luogo dell' incognita, si ottengano dei risultati di segno contrario; uno dei valori dell' incognita sarà compreso fra i due numeri sostituiti.*

Sia per esempio, l'equazione $x^4+nx^3+px^2+qx+r=0$; supponiamo che le sue quattro radici siano $x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=d$, e che sia $a>b$, $b>c$, $c>d$. Noi avremo $(x-a).(x-b).(x-c).(x-d)=0$; e sostituendo successivamente g ed h in luogo di x formeremo i due prodotti:

$$(A) \ldots (g-a)\times(g-b)\times(g-c)\times(g-d),$$
$$(B) \ldots (h-a)\times(h-b)\times(h-c)\times(h-d).$$

Ciò posto 1.° siano $g>a$; $h<a$ ed $h>b$: egli è chiaro che tutti i fattori del prodotto (A) sono positivi, che il primo fattore del prodotto (B) è negativo, e gli altri positivi. Dunque il prodotto (A) è positivo, il prodotto B negativo, e la radice a è compresa fra g ed h.

2.° Siano $g>b$, e $g<a$; $h<b$ ed $h>c$: il primo fattore di (A) è negativo, e gli altri positivi: i due primi fattori di (B) sono negativi, gli altri positivi, dunque il prodotto (A) è negativo, il pro-

dotto (B) positivo, e la radice b è compresa fra g ed h.

3.° Siano $g>c$ e $g<b$; $h<c$, ed $h>d$: i due primi fattori di (A) sono negativi, ed i due altri positivi; i tre primi fattori di (B) sono negativi, ed il quarto positivo, dunque il prodotto (A) è posisitivo, il prodotto (B) negativo, e la radice c è compresa fra g ed h.

4.° Siano $g>c$ e $g<b$; $h<c$ ed $h>d$: i due primi fattori di (A) sono negativi, ed i due altri positivi, i tre primi fattori di (B) sono negativi, ed il quarto positivo; dunque il prodotto (A) è positivo, il prodotto B negativo, e la radice c è compresa fra g ed h.

5.° Finalmente siano $g>d$ e $g<c$; $h>d$; i tre primi fattori di (A) sono negativi, il quarto positivo, i quattro fattori di (B) sono negativi: dunque il prodotto (A) è negativo, il prodotto (B) positivo; la radice d è compresa fra g ed h.

Si applicherà facilmente la medesima dimostrazione ad un' equazione di qualunque altro grado.

21. COROLLARIO I. Da ciò ne segue che se i due numeri g ed h non differiscono tra loro che dell' unità, il valore che si otterrà per x, mettendo g o h in luogo di quest' incognita, non differirà d' un' unità dal vero valore di x.

29. COROLLARIO II. Ogni equazione, il cui ultimo termine è negativo, essendo il primo positivo, ha necessariamente, almeno, una radice reale positiva. Imperciocchè sia l' equazione generale $x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}......-k=0$. Se si fa $x=0$, si avrà il risultato negativo $-k$; e se si fa $x=\infty$ (*),

(*) Questo segno ∞ serve in generale, a denotare una grandezza infinita qualunque. Bisogna sempre ricordarsi che per grandezza *infinita*, s' intende in Matematica, come è stato detto in altro luogo di questo Corso, una quantità maggiore d' ogni quantità finita determinabile.

si avrà il risultato positivo $+\infty$. Quindi, si ha quì $g=0$, $h=\infty$. Dunque uno de' valori di x è compreso fra 0 ed ∞; ed è per conseguenza uno de' numeri reali positivi compresi fra questi due limiti.

30. COROLLARIO III. Ogni equazione di grado dispari ha almeno una radice reale, la quale sarà positiva o negativa, secondo che l'ultimo termine dell'equazione sarà negativo o positivo, essendo sempre supposto il primo positivo. Difatti, si vede subito che il primo caso è compreso nell'articolo precedente. Per dimostrare il secondo, si osserverà che essendo pari il numero de' termini d'un equazione di grado dispari (1): se si cambiano i segni di questi termini, presi di due in due contando dopo il secondo inclusivamente sino all'ultimo, le radici positive diverranno negative, e le negative positive (6). Ora con questo cambiamento de' segni, l'ultimo termine dell'equazione diventa negativo. Dunque la nuova equazione ha, almeno una radice positiva, e per conseguenza l'equazione primitiva ha, almeno una radice negativa corrispondente.

31. COROLLARIO IV. Un equazione di grado pari, il cui ultimo termine è negativo, ha, almeno, due radici reali, una positiva, l'altra negativa. Imperciocchè primieramente ella ha una radice reale positiva (29). In seguito, se si cambiano i segni de' suoi termini, presi di due in due, a contare dopo il secondo, sino all'ultimo, per cambiare le radici positive; si avrà un equazione, il cui ultimo termine resterà il medesimo in tutto come quello della proposta. Dunque questa nuova equazione avrà, almeno, una radice reale positiva, e per conseguenza la radice corrispondente dell'equazione proposta sarà reale e negativa.

32. Osservazione. Può succedere che un equazio-

ne non dia mai risultati di segni contrarj, qualunque siano i numeri che si sostituiscano in luogo dell' incognita. Ciò accade 1.° allorchè l' equazione contiene soltanto delle radici eguali a due a due, a quattro a quattro, ec. Così, per esempio, l' equazione . . . $(x-a)^2 \times (x-b)^4=0$, conserverà evidentemente sempre il medesimo segno, qualunque siano i valori attribuiti ad x.

2.° Allorchè l' equazione contiene soltanto radici immaginarie. Tale è l' equazione . . . . . . $(x+a+b\sqrt{-1}).(x+a-b\sqrt{-1}).(x-c+d\sqrt{-1}).(x-c-d\sqrt{-1}) \ldots =0$, che avrà sempre il medesimo segno, qualunque valore si dia ad x. Sopra di che bisogna richiamarsi alla memoria che le radici immaginarie vanno sempre a due a due, e che le due radici che compongono una medesima coppia, non differiscono giammai che nel segno della parte immaginaria.

3.° Allorchè l' equazione contiene nel medesimo tempo delle radici eguali a due a due, a quattro, a quattro, ec. e delle radici immaginarie. Tale è l' equazione $(x-a)^2.(x-b)^4.(x+c+d\sqrt{-1}).(x+c-d\sqrt{-1})=0$.

Laonde concludiamo che ogni equazione che dà de' risultati di segni contrarj, mettendo in luogo dell' incognita de' numeri reali differenti, non cade in alcuno de' tre casi precedenti.

53. PROBLEMA. *Risolvere un' equazione qualunque, se non rigorosamente almeno per approssimazione.*

Comincio ad esaminare se questa equazione contenga delle radici eguali; queste radici, allorchè vi sono, si trovano direttamente per l' articolo 25; e si giunge ad un' equazione d' un grado inferiore che non contiene più radici eguali. Esamino ancora se l' equazione ridotta ha de' divisori commensurabili d' una dimensione; questi divisori si

trovano coi metodi del Capo II. Per mezzo di queste ricerche preliminari, non si avranno più da risolvere se non delle equazioni che contengono delle radici reali disuguali ed incommensurabili, o delle radici immaginarie, o delle radici in parte reali disuguali ed incommensurabili, ed in parte immaginarie. Suppongo adunque che le equazioni che qui si devono risolvere per approssimazione, siano di questa natura: si vedrà dagli esempj che seguono come si debba operare in generale. Questi diversi esempj hanno ciascuno la loro difficoltà particolare e si riferiscono a diverse sorti di equazioni.

Esempio I. *Risolvere con una prima approssimazione, l'equazione* $x^3+5x+7=0$.

Siccome questa equazione è di grado dispari, ed ha il suo ultimo termine positivo, sono sicuro (30) che ella ha, almeno, una radice reale negativa, e per conseguenza devo necessariamente ottenere de' risultati di segni contrarj, sostituendo in vece di x, due numeri negativi differenti. Fo dunque primieramente $x=0$, ovvero $x=-0$, il che dà il risultato positivo $+7$; fo $x=-1$; il che dà ancora un risultato positivo $+1$: fo $x=-2$, il che dà il risultato negativo -11. Laonde concludo che una delle radici dell' equazione è compresa tra -1 e -2. Le due altre radici sono immaginarie (Algeb. 200); ma se fossero reali, si determinerebbero in un modo simile i loro limiti.

Impareremo fra poco a trovare de' limiti più rigorosi per la radice reale.

Esempio II. *Risolvere con una prima approssimazione, l'equazione* $x^4-16x^2+7x+37=0$.

Supponiamo successivamente $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, ec.; poi $x=-0$, $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$, ec. avremo la Tavola che qui si vede

Supposizioni.	*Risultati.*	*Supposizioni.*	*Risultati.*
$x=0$	$+37$	$x=-0$	$+37$
$x=1$	$+29$	$x=-1$	$+15$
$x=2$	$+3$	$x=-2$	-25
$x=3$	-5	$x=-3$	-47
$x=4$	$+65$	$x=-4$	$+9$
$x=5$	$+297$		

Laonde dobbiamo conchiudere che uno de' valori di x è compreso fra 2 e 3; un secondo, fra 3 e 4; un terzo, fra -1 e -2; in fine, il quarto fra -3 e -4.

Esempio. III. *Risolvere, con una prima approssimazione, l' equazione* $x^4-15x^2+7x+37=0$.

Facendo successivamente $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5$, ec., si troveranno sempre de' risultati positivi, ma non bisogna affrettarsi a conchiudere che l' equazione non ha radici positive; perciocchè può succedere che i valori supposti per x, vadano per salti troppo grandi. Il mezzo più breve di assicurarsene è di cambiare (11) l' equazione in un' altra, le cui radici siano, per esempio, dieci volte maggiori, e di esaminare se, aumentando successivamente d' una unità la nuova incognita, non si giunga a de' risultati di segni contrarj. Fo dunque $x=\frac{y}{10}$; il che cangia l' equazione proposta in questa: $y^4-1500y^2+7000y+370000=0$. In seguito suppongo successivamente $y=0$, $y=1$, $y=2$, $y=3$ ..... $y=10$, $y=11$, $y=12$ ...... $y=20$, $y=21$, $y=22$, ec.; e trovo che le due supposizioni $y=24$, $y=25$, danno de' risultati di segni contrarj. Quindi uno de' valori di y è fra 24 e 25; e per conseguenza il valore corrispondente di x (dieci volte minore) è fra 2,4 e 2,5. Si adopri, se è necessario,

il medesimo metodo per le altre radici dell' equazione proposta.

Esempio IV. *Trovare, nell' equazione* $x^4+3x+7=0$, *le cui radici sono immaginarie, le espressioni prossime di queste radici.*

Fingo che l' equazione proposta provenga da questa; $(x+p+q\sqrt{-1})\times(x+p-q\sqrt{-1})=0$, ossia, $x^2+2px+pp+qq=0$, essendo p e q quantità reali, che si devono determinare, almeno ad un di presso. Ora l' equazione proposta e l' equazione fittizia dovendo essere identiche, si avrà paragonandole, $2p=3$, $pp+qq=7$: Noi conosciamo primieramente p, perchè il suo valore è $\frac{3}{2}$, ossia 1, 5; sostituiamo questo valore nell' equazione $pp+qq=7$; avremo $qq=7-\frac{9}{4}=\frac{19}{4}$ ossia $q^2-\frac{19}{4}=0$. Questa equazione ha (31) due radici reali, una positiva, l' altra negativa; e facendo successivamente $q=0$, $q=1$, $q=2$, $q=3$, ec. poi $q=-1$, $q=-2$, ec., si trova che la radice positiva è tra 2 e 3, e la negativa tra -2 e -3.

Quest' esempio è semplicissimo; si opererà allo stesso modo ne' casi analoghi più composti. Qualunque sia il grado d' un' equazione che contiene delle radici immaginarie, queste radici vanno sempre a due a due, e possono essere considerate come prodotte da equazioni del secondo grado; e quindi sono sempre riducibili alla forma che si è attribuita alle radici dell' equazione precedente. Quindi, fingendo che un' equazione, le cui radici sono immaginarie, sia il prodotto di molte coppie di radici immaginarie, simili a quelle dell' esempio precedente, e paragonando, termine con termine, l' equazione proposta coll' equazione fit-

tizie, si avranno molte equazioni che serviranno ad eliminare tutti i coefficienti incogniti delle radici fittizie, all' accezione d' un solo che si troverà in un equazione finale, la quale avrà, almeno, una radice reale. Si prenderà questa radice pel valore del coefficiente di cui si è parlato, in seguito risalendo alle altre equazioni dei coefficienti, si giungerà a determinarli tutti, ad un dipresso. Egli è chiaro che i loro valori saranno delle quantità reali, e che le radici dell' equazione non sono immaginarie se non perchè i coefficienti delle equazioni fittizie sono in parte moltiplicati per $\sqrt{-1}$.

34. SCOLIO I. La trasformazione adoprata nell' esempio III, ha non solo il vantaggio di togliere facilmente la difficoltà che s' incontra nelle questioni di questa natura, ma serve eziandio a trovare in un modo più prossimo le radici d' un' equazione; e ripetendola molte volte, si spingerà l' approssimazione tanto oltre, quanto si vuole. Per rendere la cosa più chiara, ripigliamo l' equazione x^3+5x+7 o. (Esempio I.). Io la cambio in un altra che abbia le radici dieci volte maggiori, col fare $x=\frac{y}{10}$; il che dà $y^3+500y+7000=0$; determino due numeri che non differiscono se non di 1, e fra i quali sia compreso il valore di y. e siccome ho già trovato che il valore di x è tra -1 e -2, vedo subito che quello di y è tra -10 e -20. Ristringiamo questo intervallo. La supposizione $y=-10$, dà per l'equazione in y, un risultato positivo, e la supposizione $y=-20$ dà un risultato negativo. Facciamo $y=-15$, noi avremo un risultato negativo; dunque il valore di y è tra -10 e -15. Sia $y=-12$, si avrà ancora un risultato negativo; dunque il valore di y è tra -10 e -12. Sia $y=-11$; si avrà un risultato positivo;

dunque il valore di y è tra -11 e -12; e quello di x e tra -1, 1; e -1, 2.

Per spingere più oltre l'approssimazione, cambio l'equazione in y, in un'altra che abbia le radici dieci volte maggiori dei valori di y, o cento volte maggiori di quelli di x. Fo dunque $y = \frac{z}{10}$; e l'equazione in y si cambia in questa: $z^3+500002+7000000=0$. E siccome il valore di y è tra -11 e -12, quello di z sarà tra -110 e -120. La supposizione $z=110$ dà, per l'equazione in z, un risultato positivo, e la supposizione $z=-120$ dà un risultato negativo. Facciamo $z=-115$: avremo un risultato negativo; dunque il valore di z e tra -110 e -115. Sia $z=-112$: avremo un risultato negativo; dunque il valore di z è tra -110, e -112. Sia $z = -111$; il risultato è positivo; dunque il valore di z è tra -111 e -112; quello di y tra -11, 1; e -11, 2, e quello di x tra -1, 11; e -1, 12. Si conosce dunque x a meno di $\frac{1}{100}$ circa, e continuando sempre ad operare nella stessa maniera, si potrà trovare un valore che differisca quanto poco si vorrà da quello di x.

Farò osservare di passaggio che la trasformazione d'un'equazione in un'altra che abbia le radici 10 volte, 100 volte, 1000 volte ec. maggiori, serve a cambiare un'equazione che contiene delle parti decimali in un'altra che non ne contenga. Sia, per esempio, l'equazione $x^3+5,745x^2+6,7847x+9,7428=0$: il coefficiente del secondo termine contenendo tre figure decimali, cambio l'equazione in un'altra che abbia le radici 1000 volte maggiori; fo dunque $x = \frac{y}{1000}$; il che mi dà

$y^3+5745\,y^2+6784700+9742800000=0$: equazione nella quale non vi sono parti decimali.

55. SCOLIO II. Quando si è trovato, a meno di $\frac{1}{10}$ circa, una delle radici d'un' equazione, il metodo seguente, dovuto a NEWTON, dà con un calcolo molto spedito il valore di questa radice, prossimo quanto si vuole. Per esempio, sia ancora la nostra equazione $x^3+5x+7=0$, nella quale il valore di x è a meno di $\frac{1}{10}$ circa, $-1, 1$, come l'abbiamo trovato.

Si prenda $x=-1, 1+z$, essendo z ciò che si dovrebbe aggiungere a $-1, 1$, per avere un valore esatto di x. Per mezzo di questo valore, si elimini x dall'equazione proposta $x^3+5x+7=0$; si avrà la trasformata $z^3-3, 3, z^2+8, 63z+0, 169=0$. Ora, siccome la quantità z è minore di $\frac{1}{10}$, e che per conseguenza il suo quadrato è minore di $\frac{1}{100}$, il suo cubo minore di $\frac{1}{1000}$: così egli è chiaro che i due termini che contengono z^3 e z^2 sono molto più piccoli degli altri, e quindi possono essere trascurati. Avremo in conseguenza $8{,}63z+0, 169=0$; il che dà $z=-\frac{0, 196}{0, 63}=-\frac{196}{8630}=-0, 8019$ ad un di presso. Dunque $x=-1, 1+z=-1, 119$, ad un di presso.

L'approssimazione può essere spinta più oltre con diversi mezzi che tutti dipendono dallo stesso

metodo. Primieramente possiamo scrivere l'equazione generale in z, sotto questa forma . . . .
$z = \frac{-0,169}{z^2 - 3,3z + 8,63}$. Sostituendo nel denominatore, in luogo di z, il suo primo valore prossimo $-0,019$, ed in luogo di z^2 il suo valore parimente prossimo $0,000361$, si avrà $z = \frac{-0,160}{8,693061} = -0,0194$ ad un di presso. Dunque $x = -1,1194$, ad un di presso.

La medesima equazione generale in z può essere risoluta, senza trascurare alcun altro termine, fuorchè z^3. Con ciò, si ha l'equazione del secondo grado, $-3,3z^2 + 8,63z + 0,169 = 0$, la quale dà $z = -0,0195$, ad un di presso. Dunque $x = -1,1195$, ad un di presso.

Finalmente, in quella maniera che ci siamo serviti del primo valore $-1, 1$, prossimo di x, per trovare il secondo valore $-1, 119$ che è più esatto; possiamo servirci di questo per trovarne un terzo ancor più esatto. Supponiamo adunque $x = -1, 119 + u$; e mettiamo questo valore nell'equazione proposta $x^3 + 5x + 7 = 0$. E siccome i termini che conterranno u^3 ed u^2, possono essere rigettati senza scrupolo, dispensiamoci dallo scrivere questi termini, per risparmiarci de' calcoli inutili. La trasformazione in u sarà dunque semplicemente $8,756483\,u + 0,003831841 = 0$. Laonde si ricava, ad un di presso, $u = -0,00044$. Dunque $x = -1,11944$, ad un di presso.

Egli è chiaro che col mezzo di questo terzo valore prossimo di x, si può trovarne un quarto ancora più prossimo, e così di seguito.

CAPO V.

Risoluzione prossima delle equazioni letterali.

56. I metodi di approssimazione per le equazioni numeriche, si applicano del pari alle equazioni letterali omogenee che contengono semplicemente due lettere; cioè a dire l' incognita, ed un' altra lettera cognita. Per esempio, se venga proposta l' equazione $x^4-5a^2x^2+7a^3x+11a^4=0$; la quale contiene la sola incognita x, e la quantità cognita a; si supporrà $a=1$, e con ciò si avrà l'equazione numerica $x^4-5x^2+7x+11=0$. Quando si saranno trovate le radici di quest' equazione, si moltiplicheranno per a, e si avranno quelle della proposta. Quì adunque non si tratta di questo genere di equazioni.

Si deve osservare che se un' equazione ove appariscono due sole lettere, non fosse omogenea, ella sarebbe riputata contenere tre lettere, perchè i termini nei quali le dimensioni sono le minori, devono essere supposti moltiplicati per le potenze d' una lettera che si è riguardata come unità; e che è sottintesa. Parimente, un' equazione ove non appariscono che tre lettere, e che non è omogenea, deve essere riputata contenere quattro lettere; così di seguito.

37. PROBLEMA. *Trovare, per mezzo d' una serie infinita convergente, il valore prossimo d' una delle radici d' un' equazione che contiene più di due lettere.*

Sia, per esempio, l' equazione omogenea ed a tre lettere $x^3+a^2x+abx-2a^3-b^3=0$. Le due quantità date a e b devono essere riguardate come disuguali: perciocchè se fosse $a=b$, l' una o l' altra

di queste lettere potrebbe essere cacciata dall'equazione, la quale non conterrebbe più allora se non due lettere.

I.° Caso: $a>b$. Fingo che abbiasi $x=A+Bb+Cb^2+Db^3+$ec. essendo A, B, C, D, ec. de' coefficienti incogniti che trattasi di determinare. Per mezzo di questo valore di x l' equazione proposta $x^3+a^2x+abx-2a^3-b^3=0$, dà, ordinando il secondo membro per rapporto a b.

$$\begin{array}{llllll}
x^3= & +A^3 & +3A^2B.b & +3AB^2.b^2 & +B^3b^3 & +\text{ec.} \\
 & & & +3A^2C.b^2 & +3A^2D.b^3 & +\text{ec.} \\
 & & & & +6ABC.b^3 & +\text{ec.} \\
+a^2x= & +a^2A & +a^2Bb & +a^2C.b^2 & +a^2D.b^3 & +\text{ec.} \\
+abx= & & +aAb & +aB.b^2 & +aC.b^3 & +\text{ec.} \\
-2a^3= & -2a^3 & & & & \\
-b^3= & \ldots & \ldots & \ldots & -1.b^3 &
\end{array}$$

E siccome si ha $x^3+a^2x+abx-2a^3-b^3=0$, ne segue che la somma di tutte le serie che compongono il secondo membro dell' espressione precedente, deve essere altresì eguale a zero. Dunque ciascun termine particolare di questa somma deve essere zero. Difatti, il valore di b può essere tanto piccolo quanto si vuole, e se esso si suppone infinitamente piccolo, si vedrà, paragonando tra loro i termini del secondo membro, che il primo dee riguardarsi come infinito per rapporto al secondo, il secondo come infinito per rapporto al terzo, il terzo come infinito per rapporto al quarto, e così di seguito. Onde ne risulta che un termine qualunque non può essere distrutto nè da quelli che lo precedono, nè da quelli che lo seguono, e che conseguentemente la totalità dei termini non sarebbe zero, se ciascuno di essi in particolare non fosse zero. Si avranno dunque, per determinare A, B, C, D, ec. le equazioni particolari, $A^3+a^2A-2a^3=0$; $(3A^2.B+a^2B+aA)b=0$;

$(3AB^2+3A^2C+a^2C+aB)b^2=0$; $(B^3+3A^2.D+6ABC+a^2D+aC-1)b^3=0$; ec. La prima dà $A=a$; la seconda dà (dividendo tutto per b, e mettendo in vece di A il suo valore), $3a^2B+a^2B+a^2=0$, e per conseguenza $B=-\frac{1}{4}$. La terza dà (cacciando b^2, A, B), $\frac{3}{16}a+4a^2C-\frac{a}{4}=0$, e quindi . . . . . $C=\frac{1}{64a}$. La quarta dà similmente $D=\frac{131}{512a^2}$, ec. Sostituiamo questi valori di A, B, C, D, ec. nella serie supposta : ed avremo $x=a+-\frac{b}{4}+\frac{b^2}{64a}+\frac{131b^3}{512a^2}+$ ec. che è la serie ricercata nel primo caso. Si scorge che questa serie è convergente.

È bene di osservare che si è determinato il primo coefficiente A colla risoluzione dell' equazione $A^3+a^2A-2a^3=0$; risoluzione che è stata facile, perchè quest' equazione è risolubile in divisori razionali. Ma se in caso simile, l' equazione non fosse decomponibile in divisori razionali, si determinerebbe A almeno per approssimazione (36) ; poichè l' equazione è omogenea, e non contiene che due lettere.

II.° Caso : $a<b$. Fingo che abbiasi $z=A+Ba+Ca^2+Da^3+$ec. Dunque, ordinando il secondo membro per rapporto ad a, si avrà . . . . . .

$$\begin{array}{rccccc} x^3 = & A^3 + 3A^2B.a & + 3AB^2.a^2 & + \quad B^3a^3 & + ec. \\ & & + 3A^2C.a^2 & + 3A^2D.a^3 & + ec. \\ & & & + 6ABC.a^3 & + ec. \\ + a^2x = & & + \quad A.a^2 & + \quad B.a^3 & + ec. \\ + abx = & + \quad Ab.a & + \quad Bb.a^2 & + \quad Cb.a^3 & + ec. \\ - 2a^3 = & & & - \quad 2.a^3 & \\ - b^3 = - b^3 & & & & \end{array}$$

Dunque per essere $x^3 + a^2x + abx - 2a^3 - b^3 = o$, il secondo membro dell' espressione precedente sarà altresì zero. Inoltre, ciascuno dei termini, in particolare, di questa espressione sarà zero. Laonde si avranno le equazioni, $A^3 - b^3 = o$; $(3A^2B + Ab)a = o$; $(3AB^2 + 3A^2C + A + Bb)a^2 = o$; $(B^3 + 3A^2D + 6ABC + B + Cb - 2)a^3 = o$; ec.: le quali danno $A = b$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = -\frac{1}{3b}$, $D = \frac{55}{81b^2}$, ec. Dunque, mettendo in vece di A, B, C, D, ec., i loro valori; la serie finita diverrà $x = b - \frac{a}{3} - \frac{a^2}{3b} + \frac{55a^3}{81b^2}$ ec.

38. COROLLARIO. Il valore trovato per x essendo una delle tre radici dell' equazione proposta $x^3 + a^2x + abx - 2a^3 - b^3 = o$: se dicasi M questa radice, e si divida l' equazione per $x - M = o$, si otterrà un' equazione di un grado più basso, della quale si conosceranno, ad un di presso, i coefficienti e l' ultimo termine, e della quale si determineranno le radici con un metodo simile al precedente, supposto che queste radici siano reali. Lo stesso dicasi delle equazioni dei gradi più elevati.

dotto (B) positivo, e la radice b è compresa fra g ed h.

3.° Siano $g>c$ e $g<b$; $h<c$, ed $h>d$: i due primi fattori di (A) sono negativi, ed i due altri positivi; i tre primi fattori di (B) sono negativi, ed il quarto positivo, dunque il prodotto (A) è positivo, il prodotto (B) negativo, e la radice c è compresa fra g ed h.

4.° Siano $g>c$ e $g<b$; $h<c$ ed $h>d$: i due primi fattori di (A) sono negativi, ed i due altri positivi, i tre primi fattori di (B) sono negativi, ed il quarto positivo; dunque il prodotto (A) è positivo, il prodotto B negativo, e la radice c è compresa fra g ed h.

5.° Finalmente siano $g>d$ e $g<c$; $h>d$; i tre primi fattori di (A) sono negativi, il quarto positivo, i quattro fattori di (B) sono negativi: dunque il prodotto (A) è negativo, il prodotto (B) positivo; la radice d è compresa fra g ed h.

Si applicherà facilmente la medesima dimostrazione ad un' equazione di qualunque altro grado.

21. COROLLARIO I. Da ciò ne segue che se i due numeri g ed h non differiscono tra loro che dell' unità, il valore che si otterrà per x, mettendo g o h in luogo di quest' incognita, non differirà d' un' unità dal vero valore di x.

29. COROLLARIO II. Ogni equazione, il cui ultimo termine è negativo, essendo il primo positivo, ha necessariamente, almeno, una radice reale positiva. Imperciocchè sia l' equazione generale $x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}......-k=o$. Se si fa $x=o$, si avrà il risultato negativo $-k$; e se si fa $x=\infty$ (*),

(*) Questo segno ∞ serve in generale, a denotare una grandezza infinita qualunque. Bisogna sempre ricordarsi che per grandezza *infinita*, s' intende in Matematica, come è stato detto in altro luogo di questo Corso, una quantità maggiore d' ogni quantità finita determinabile.

si avrà il risultato positivo $+\infty$. Quindi, si ha qui $g=0$, $h=\infty$. Dunque uno de' valori di x è compreso fra o ed ∞; ed è per conseguenza uno de' numeri reali positivi compresi fra questi due limiti.

30. COROLLARIO III. Ogni equazione di grado dispari ha almeno una radice reale, la quale sarà positiva o negativa, secondo che l'ultimo termine dell'equazione sarà negativo o positivo, essendo sempre supposto il primo positivo. Difatti, si vede subito che il primo caso è compreso nell' articolo precedente. Per dimostrare il secondo, si osserverà che essendo pari il numero de' termini d'un equazione di grado dispari (1): se si cambiano i segni di questi termini, presi di due in due contando dopo il secondo inclusivamente sino all' ultimo, le radici positive diverranno negative, e le negative positive (6). Ora con questo cambiamento de' segni, l' ultimo termine dell' equazione diventa negativo. Dunque la nuova equazione ha, almeno una radice positiva, e per conseguenza l' equazione primitiva ha, almeno una radice negativa corrispondente.

31. COROLLARIO IV. Un equazione di grado pari, il cui ultimo termine è negativo, ha, almeno, due radici reali, una positiva, l'altra negativa. Imperciocchè primieramente ella ha una radice reale positiva (29). In seguito, se si cambiano i segni de' suoi termini, presi di due in due, a contare dopo il secondo, sino all' ultimo, per cambiare le radici positive; si avrà un' equazione, il cui ultimo termine resterà il medesimo in tutto come quello della proposta. Dunque questa nuova equazione avrà, almeno, una radice reale positiva, e per conseguenza la radice corrispondente dell' equazione proposta sarà reale e negativa.

32. Osservazione. Può succedere che un' equazio-

ne non dia mai risultati di segni contrarj, qualunque siano i numeri che si sostituiscano in luogo dell' incognita. Ciò accade 1.° allorchè l' equazione contiene soltanto delle radici eguali a due a due, a quattro a quattro, ec. Così, per esempio, l' equazione .... $(x-a)^2 \times (x-b)^4=0$, conserverà evidentemente sempre il medesimo segno, qualunque siano i valori attribuiti ad x.

2.° Allorchè l' equazione contiene soltanto radici immaginarie. Tale è l' equazione .... $(x+a+b\sqrt{-1}) \cdot (x+a-b\sqrt{-1}) \cdot (x-c+d\sqrt{-1}) \cdot (x-c-d\sqrt{-1}) \ldots = 0$, che avrà sempre il medesimo segno, qualunque valore si dia ad x. Sopra di che bisogna richiamarsi alla memoria che le radici immaginarie vanno sempre a due a due, e che le due radici che compongono una medesima coppia, non differiscono giammai che nel segno della parte immaginaria.

3.° Allorchè l' equazione contiene nel medesimo tempo delle radici eguali a due a due, a quattro a quattro, ec. e delle radici immaginarie. Tale è l' equazione $(x-a)^2 \cdot (x-b)^4 \cdot (x+c+d\sqrt{-1}) \cdot (x+c-d\sqrt{-1})=0$.

Laonde concludiamo che ogni equazione che dà de' risultati di segni contrarj, mettendo in luogo dell' incognita de' numeri reali differenti, non cade in alcuno de' tre casi precedenti.

53. PROBLEMA. *Risolvere un' equazione qualunque, se non rigorosamente almeno per approssimazione.*

Comincio ad esaminare se questa equazione contenga delle radici eguali; queste radici, allorchè vi sono, si trovano direttamente per l' articolo 25; e si giunge ad un' equazione d' un grado inferiore che non contiene più radici eguali. Esamino ancora se l' equazione ridotta ha de' divisori commensurabili d' una dimensione; questi divisori si

trovano coi metodi del Capo II. Per mezzo di queste ricerche preliminari, non si avranno più da risolvere se non delle equazioni che contengono delle radici reali disuguali ed incommensurabili, o delle radici immaginarie, o delle radici in parte reali disugnali ed incommensurabili, ed in parte immaginarie. Suppongo adunque che le equazioni che qui si devono risolvere per approssimazione, siano di questa natura: si vedrà dagli esempj che seguono come si debba operare in generale. Questi diversi esempj hanno ciascuno la loro difficoltà particolare e si riferiscono a diverse sorti di equazioni.

Esempio I. *Risolvere con una prima approssimazione*, *l' equazione* $x^3+5x+7=0$.

Siccome questa equazione è di grado dispari, ed ha il suo ultimo termine positivo, sono sicuro (30) che ella ha, almeno, una radice reale negativa, e per conseguenza devo necessariamente ottenere de' risultati di segni contrarj, sostituendo in vece di x, due numeri negativi differenti. Fo dunque primieramente $x=0$, ovvero $x=-0$, il che dà il risultato positivo $+7$; fo $x=-1$; il che dà ancora un risultato positivo $+1$: fo $x=-2$, il che dà il risultato negativo -11. Laonde concludo che una delle radici dell' equazione è compresa tra -1 e -2. Le due altre radici sono immaginarie (Algeb. 200); ma se fossero reali, si determinerebbero in un modo simile i loro limiti.

Impareremo fra poco a trovare de' limiti più rigorosi per la radice reale.

Esempio II. *Risolvere con una prima approssimazione*, *l' equazione* $x^4-16x^2+7x+37=0$.

Supponiamo successivamente $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, ec.; poi $x=-0$, $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$, ec. avremo la Tavola che qui si vede

Supposizioni.	*Risultati.*	*Supposizioni.*	*Risultati.*
$x=0$	$+37$	$x=-0$	$+37$
$x=1$	$+29$	$x=-1$	$+15$
$x=2$	$+3$	$x=-2$	-25
$x=3$	-5	$x=-3$	-47
$x=4$	$+65$	$x=-4$	$+9$
$x=5$	$+297$		

Laonde dobbiamo concludere che uno de' valori di x è comprese fra 2 e 3; un secondo, fra 3 e 4; un terzo, fra -1 e -2; in fine, il quarto fra -3 e -4.

Esempio. III. *Risolvere, con una prima approssimazione, l' equazione* $x^4-15x^2+7x+37=0$.

Facendo successivamente $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5$, ec., si troveranno sempre de' risultati positivi, ma non bisogna affrettarsi a concludere che l' equazione non ha radici positive; perciocchè può succedere che i valori supposti per x, vadano per salti troppo grandi. Il mezzo più breve di assicurarsene è di cambiare (11) l' equazione in un' altra, le cui radici siano, per esempio, dieci volte maggiori, e di esaminare se, aumentando successivamente d' una unità la nuova incognita, non si giunga a de' risultati di segni contrarj. Fo dunque $x=\frac{y}{10}$; il che cangia l' equazione proposta in questa: $y^4-1500y^2+7000y+370000=0$. In seguito suppongo successivamente $y=0$, $y=1$, $y=2$, $y=3$ ..... $y=10$, $y=11$, $y=12$ ...... $y=20$, $y=21$, $y=22$, ec.; e trovo che le due supposizioni $y=24$, $y=25$, danno de' risultati di segni contrarj. Quindi uno de' valori di y è fra 24 e 25; e per conseguenza il valore corrispondente di x (dieci volte minore) è fra 2,4 e 2,5. Si adopri, se è necessario,

il medesimo metodo per le altre radici dell' equazione proposta.

Esempio IV. *Trovare, nell' equazione* $x^2+3x+7=0$, *le cui radici sono immaginarie, le espressioni prossime di queste radici.*

Fingo che l' equazione proposta provenga da questa; $(x+p+q\sqrt{-1})\times(x+p-q\sqrt{-1})=0$, ossia, $x^2+2px+pp+qq=0$, essendo p e q quantità reali, che si devono determinare, almeno ad un di presso. Ora l' equazione proposta e l' equazione fittizia dovendo essere identiche, si avrà paragonandole, $2p=3$, $pp+qq=7$: Noi conosciamo primieramente

p, perchè il suo valore è $\frac{3}{2}$, ossia 1, 5; sostituiamo questo valore nell' equazione $pp+qq=7$; avremo $qq=7-\frac{9}{4}=\frac{19}{4}$ ossia $q^2-\frac{19}{4}=0$. Questa equazione ha (31) due radici reali, una positiva, l' altra negativa; e facendo successivamente $q=0$, $q=1$, $q=2$, $q=3$, ec. poi $q=-1$, $q=-2$, ec., si trova che la radice positiva è tra 2 e 3, e la negativa tra -2 e -3.

Quest' esempio è semplicissimo; si opererà allo stesso modo ne' casi analoghi più composti. Qualunque sia il grado d' un' equazione che contiene delle radici immaginarie, queste radici vanno sempre a due a due, e possono essere considerate come prodotte da equazioni del secondo grado; e quindi sono sempre riducibili alla forma che si è attribuita alle radici dell' equazione precedente. Quindi, fingendo che un' equazione, le cui radici sono immaginarie, sia il prodotto di molte coppie di radici immaginarie, simili a quelle dell' esempio precedente, e paragonando, termine con termine, l' equazione proposta coll' equazione fit-

tizia, si avranno molte equazioni che serviranno ad eliminare tutti i coefficienti incogniti delle radici fittizie, all' accezione d' un solo che si troverà in un equazione finale, la quale avrà, almeno, una radice reale. Si prenderà questa radice pel valore del coefficiente di cui si è parlato, in seguito risalendo alle altre equazioni dei coefficienti, si giungerà a determinarli tutti, ad un dipresso. Egli è chiaro che i loro valori saranno delle quantità reali, e che le radici dell' equazione non sono immaginarie se non perchè i coefficienti delle equazioni fittizie sono in parte moltiplicati per $\sqrt{-1}$.

34. SCOLIO I. La trasformazione adoprata nell' esempio III, ha non solo il vantaggio di togliere facilmente la difficoltà che s' incontra nelle questioni di questa natura, ma serve eziandio a trovare in un modo più prossimo le radici d' un' equazione; e ripetendola molte volte, si spingerà l' approssimazione tanto oltre, quanto si vuole. Per rendere la cosa più chiara, ripigliamo l' equazione $x^3+5x+7=0$. (Esempio I.). Io la cambio in un altra che abbia le radici dieci volte maggiori, col fare $x=\frac{y}{10}$; il che dà $y^3+500y+7000=0$; determino due numeri che non differiscono se non di 1, e fra i quali sia compreso il valore di y. e siccome ho già trovato che il valore di x è tra -1 e -2, vedo subito che quello di y è tra -10 e -20. Ristringiamo questo intervallo. La supposizione $y=-10$, dà per l'equazione in y, un risultato positivo, e la supposizione $y=-20$ dà un risultato negativo. Facciamo $y=-15$, noi avremo un risultato negativo; dunque il valore di y è tra -10 e -15. Sia $y=-12$, si avrà ancora un risultato negativo; dunque il valore di y è tra -10 e -12. Sia $y=-11$; si avrà un risultato positivo;

dunque il valore di y è tra -11 e -12; e quello di x e tra $-1, 1$; e $-1, 2$.

Per spingere più oltre l'approssimazione, cambio l'equazione in y, in un'altra che abbia le radici dieci volte maggiori dei valori di y, o cento volte maggiori di quelli di x. Fo dunque $y = \frac{z}{10}$; e l'equazione in y si cambia in questa; $z^3+500000z+7000000=0$. E siccome il valore di y è tra -11 e -12, quello di z sarà tra -110 e -120. La supposizione $z=110$ dà, per l'equazione in z, un risultato positivo, e la supposizione $z=-120$ dà un risultato negativo. Facciamo $z=-115$: avremo un risultato negativo; dunque il valore di z e tra -110 e -115. Sia $z=-112$: avremo un risultato negativo; dunque il valore di z è tra -110, e -112. Sia $z=-111$; il risultato è positivo; dunque il valore di z è tra -111 e -112; quello di y tra $-11, 1$; e $-11, 2$, e quello di x tra $-1, 11$; e $-1, 12$. Si conosce dunque x a meno di $\frac{1}{100}$ circa, e continuando sempre ad operare nella stessa maniera, si potrà trovare un valore che differisca quanto poco si vorrà da quello di x.

Farò osservare di passaggio che la trasformazione d'un'equazione in un'altra che abbia le radici 10 volte, 100 volte, 1000 volte ec. maggiori, serve a cambiare un'equazione che contiene delle parti decimali in un'altra che non ne contenga. Sia, per esempio, l'equazione $x^3+5, 745x^2+6, 7847x+9, 7428=0$: il coefficiente del secondo termine contenendo tre figure decimali, cambio l'equazione in un'altra che abbia le radici 1000 volte maggiori; fo dunque $x=\frac{y}{1000}$; il che mi dà,

$y^3+5745\,y+6784700+9742800000=0$: equazione nella quale non vi sono parti decimali.

55. SCOLIO II. Quando si è trovato, a meno di $\frac{1}{10}$ circa, una delle radici d'un' equazione, il metodo seguente, dovuto a NEWTON, dà con un calcolo molto spedito il valore di questa radice, prossimo quanto si vuole. Per esempio, sia ancora la nostra equazione $x^3+5x+7=0$, nella quale il valore di x è a meno di $\frac{1}{10}$ circa, -1, 1, come l'abbiamo trovato.

Si prenda $x=-1, 1+z$, essendo z ciò che si dovrebbe aggiungere a -1, 1, per avere un valore esatto di x. Per mezzo di questo valore, si elimini x dall'equazione proposta $x^3+5x+7=0$; si avrà la trasformata $z^3-3, 3, z^2+8, 63z+0, 169=0$. Ora, siccome la quantità z è minore di $\frac{1}{10}$, e che per conseguenza il suo quadrato è minore di $\frac{1}{100}$, il suo cubo minore di $\frac{1}{1000}$: così egli è chiaro che i due termini che contengono z^3 e z^2 sono molto più piccoli degli altri, e quindi possono essere trascurati. Avremo in conseguenza $8,63z+0, 169=0$;

il che dà $z=-\frac{0,196}{0,63}=-\frac{196}{8630}=-0, 8019$ ad un di presso. Dunque $x=-1, 1+z=-1, 119$, ad un di presso.

L'approssimazione può essere spinta più oltre con diversi mezzi che tutti dipendono dallo stesso

metodo. Primieramente possiamo scrivere l'equazione generale in z, sotto questa forma . . . .
$z=\frac{-0,169}{z^2-3,3z+8,63}$. Sostituendo nel denominatore, in luogo di z, il suo primo valore prossimo $-0,019$, ed in luogo di z^2 il suo valore parimente prossimo $0,000361$, si avrà $z=\frac{-0,160}{8,693061}=-0,0194$ ad un di presso. Dunque $x=-1,1194$, ad un di presso.

La medesima equazione generale in z può essere risoluta, senza trascurare alcun altro termine, fuorchè z^3. Con ciò, si ha l'equazione del secondo grado, $-3,3z^2+8,63z+0,169=0$, la quale dà $z=-0,0195$, ad un di presso. Dunque $x=-1,1195$, ad un di presso.

Finalmente, in quella maniera che ci siamo serviti del primo valore $-1, 1$, prossimo di x, per trovare il secondo valore $-1, 119$ che è più esatto; possiamo servirci di questo per trovarne un terzo ancor più esatto. Supponiamo adunque $x=-1,119+u$; e mettiamo questo valore nell'equazione proposta $x^3+5x+7=0$. E siccome i termini che conterranno u^3 ed u^2, possono essere rigettati senza scrupolo, dispensiamoci dallo scrivere questi termini, per risparmiarci de' calcoli inutili. La trasformazione in u sarà dunque semplicemente, $8,756483\ u+0,00383841=0$. Laonde si ricava, ad un di presso, $u=-0,00044$. Dunque $x=-1,11944$, ad un di presso.

Egli è chiaro che col mezzo di questo terzo valore prossimo di x, si può trovarne un quarto ancora più prossimo, e così di seguito.

CAPO V.

Risoluzione prossima delle equazioni letterali.

56. I metodi di approssimazione per le equazioni numeriche, si applicano del pari alle equazioni letterali omogenee che contengono semplicemente due lettere, cioè a dire l' incognita, ed un' altra lettera cognita. Per esempio, se venga proposta l' equazione $x^4-5a^2x^2+7a^3x+11a^4=0$; la quale contiene la sola incognita x, e la quantità cognita a; si supporrà $a=1$, e con ciò si avrà l'equazione numerica $x^4-5x^2+7x+11=0$. Quando si saranno trovate le radici di quest' equazione, si moltiplicheranno per a, e si avranno quelle della proposta. Quì adunque non si tratta di questo genere di equazioni.

Si deve osservare che se un' equazione ove appariscono due sole lettere, non fosse omogenea, ella sarebbe riputata contenere tre lettere, perchè i termini nei quali le dimensioni sono le minori, devono essere supposti moltiplicati per le potenze d' una lettera che si è riguardata come unità, e che è sottintesa. Parimente, un' equazione ove non appariscono che tre lettere, e che non è omogenea, deve essere riputata contenere quattro lettere; così di seguito.

37. PROBLEMA. *Trovare, per mezzo d' una serie infinita convergente, il valore prossimo d' una delle radici d' un' equazione che contiene più di due lettere.*

Sia, per esempio, l' equazione omogenea ed a tre lettere $x^3+a^2x+abx-2a^3-b^3=0$. Le due quantità date a e b devono essere riguardate come disuguali: perciocchè se fosse $a=b$, l' una o l' altra

di queste lettere potrebbe essere cacciata dall'equazione, la quale non conterrebbe più allora se non due lettere.

I.° Caso: $a>b$. Fingo che abbiasi $x=A+Bb+Cb^2+Db^3+$ec. essendo A, B, C, D, ec. de' coefficienti incogniti che trattasi di determinare. Per mezzo di questo valore di x l' equazione proposta $x^3+a^2x+abx-2a^3-b^3=0$, dà, ordinando il secondo membro per rapporto a b.

$$\begin{array}{rclllll}
x^3 & = & +A^3 & +3A^2B.b & +3AB^2.b^2 & +B^3b^3 & +\text{ec.} \\
 & & & & +3A^2C.b^2 & +3A^2D.b^3 & +\text{ec.} \\
 & & & & & +6ABC.b^3 & +\text{ec.} \\
+a^2x & = & +a^2A & +a^2Bb & +a^2C.b^2 & +a^2D.b^3 & +\text{ec.} \\
+abx & = & & +aAb & +aB.b^2 & +aC.b^3 & +\text{ec.} \\
-2a^3 & = & -2a^3 & & & & \\
-b^3 & = & \ldots & \ldots & \ldots & -1.b^3 &
\end{array}$$

E siccome si ha $x^3+a^2x+abx-2a^3-b^3=0$, ne segue che la somma di tutte le serie che compongono il secondo membro dell' espressione precedente, deve essere altresì eguale a zero. Dunque ciascun termine particolare di questa somma deve essere zero. Difatti, il valore di b può essere tanto piccolo quanto si vuole, e se esso si suppone infinitamente piccolo, si vedrà, paragonando tra loro i termini del secondo membro, che il primo dee riguardarsi come infinito per rapporto al secondo, il secondo come infinito per rapporto al terzo, il terzo come infinito per rapporto al quarto, e così di seguito. Onde ne risulta che un termine qualunque non può essere distrutto nè da quelli che lo precedono, nè da quelli che lo seguono, e che conseguentemente la totalità dei termini non sarebbe zero, se ciascuno di essi in particolare non fosse zero. Si avranno dunque, per determinare A, B, C, D, ec. le equazioni particolari, $A^3+a^2A-2a^3=0$; $(3A^2.B+a^2B+aA)b=0$;

$(3AB^2+3A^2C+a^2C+aB)b^3=0$; $(B^3+3A^2.D+6ABC+a^2D+aC-1)b^4=0$; ec. La prima dà $A=a$; la seconda dà (dividendo tutto per b, e mettendo in vece di A il suo valore), $3a^2B+a^2B+a^2=0$, e per conseguenza $B=-\frac{1}{4}$. La terza dà (cacciando b^3, A, B), $\frac{3}{16}a+4a^2C-\frac{a}{4}=0$, e quindi . . . . . $C=\frac{1}{64a}$. La quarta dà similmente $D=\frac{131}{512a^2}$, ec. Sostituiamo questi valori di A, B, C, D, ec. nella serie supposta : ed avremo $x=a+-\frac{b}{4}+\frac{b^2}{64a}+\frac{131b^3}{512a^2}+$ ec. che è la serie ricercata nel primo caso. Si scorge che questa serie è convergente.

È bene di osservare che si è determinato il primo coefficiente A colla risoluzione dell' equazione $A^3+a^2A-2a^3=0$; risoluzione che è stata facile, perchè quest' equazione è risolubile in divisori razionali. Ma se in caso simile, l' equazione non fosse decomponibile in divisori razionali, si determinerebbe A almeno per approssimazione (36) ; poichè l' equazione è omogenea, e non contiene che due lettere.

II.° Caso : $a<b$. Fingo che abbiasi $z=A+Ba+Ca^2+Da^3+$ec. Dunque, ordinando il secondo membro per rapporto ad a, si avrà . . . .

$$\begin{array}{lllll}
x^3 = A^3 + 3A^2B.a + & 3AB^2.a^2 + & B^3a^3 & + ec. \\
 & + 3A^2C.a^2 + & 3A^2D.a^3 & + ec. \\
 & & + 6ABC.a^3 & + ec. \\
+a^2x = & + A.a^2 + & B.a^3 & + ec. \\
+abx = + Ab.a + & Bb.a^2 + & Cb.a^3 & + ec. \\
-2a^3 = & & - 2.a^3 & \\
-b^3 = -b^3 & & &
\end{array}$$

Dunque per essere $x^3+a^2x+abx-2a^3-b^3=o$, il secondo membro dell' espressione precedente sarà altresì zero. Inoltre, ciascuno dei termini, in particolare, di questa espressione sarà zero. Laonde si avranno le equazioni, $A^3-b^3=o$; $(3A^2B+Ab)a=o$; $(3AB^2+3A^2C+A+Bb)a^2=o$; $(B^3+3A^2D+6ABC+B+Cb-2)a^3=o$; ec.: le quali danno $A=b$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=-\frac{1}{3b}$, $D=\frac{55}{81b^2}$, ec. Dunque, mettendo in vece di A, B, C, D, ec., i loro valori; la serie finita diverrà $x=b-\frac{a}{3}-\frac{a^2}{3b}+\frac{55a^3}{81b^2}-$ ec.

58. COROLLARIO. Il valore trovato per x essendo una delle tre radici dell' equazione proposta $x^3+a^2x+abx-2a^3-b^3=o$: se dicasi M questa radice, e si divida l' equazione per $x-M=o$, si otterrà un' equazione di un grado più basso, della quale si conosceranno, ad un di presso, i coefficienti e l' ultimo termine, e della quale si determineranno le radici con un metodo simile al precedente, supposto che queste radici siano reali. Lo stesso dicasi delle equazioni dei gradi più elevati.

39. Si è dovuto osservare l' uso e l' utilità dei *coefficienti indeterminati*, soprattutto per la formazione delle serie. Questo metodo è, per così dire, l' anima di tutta l' Analisi. Non si saprebbe adunque rendierselo troppo famigliare. Eccone alcune applicazioni le quali sono un poco estranee all'oggetto presente, ma si perdonerà questa piccola digressione, in grazia della sua utilità.

Sia la quantità $\frac{1}{a+x}$, da trasformare in una serie la quale cammini secondo le potenze di x che si suppone minore di a. Fingo che abbiasi, $\frac{1}{a+x}$ $=A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ec. Dunque moltiplicando tutto per $a+x$, ordinando per rapporto ad x, e mettendo tutti i termini nel secondo membro, si avrà:

$$o=\left\{\begin{matrix}+aA\\-1\end{matrix}\right.\left.\begin{matrix}+aB\\+A\end{matrix}\right\}x\left.\begin{matrix}+aC\\+B\end{matrix}\right\}x^2\left.\begin{matrix}+aD\\+C\end{matrix}\right\}x^3+\text{ec.}$$

Uguagliamo a zero ciascuna delle parti del secondo membro; avremo $aA-1=o$; $(aB+A)x=o$; $(aC+B)\,x^2=o$, $(aD+C)\,x^3=o$, ec. equazioni che danno . . . .

$$A=\frac{1}{a},\ B=-\frac{A}{a}=\frac{1}{a^2},\ C=-\frac{B}{a}=+\frac{1}{a^3}:$$

$$D=-\frac{C}{a}=-\frac{1}{a^4},\ \text{ec. Laonde si avrà}\ \ldots$$

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\text{ec.},$$ come si trova per mezzo della divisione.

Sia la quantità $(a+x)^{\frac{1}{2}}$ da svolgersi in serie, essendo $x<a$. Quest' operazione può farsi col metodo dell' estrazione della radice, ovvero colla formola del binomio; ma si può ottenere il medesimo intento per mezzo dei coefficienti indeterminati. Fingo, perciò, che abbiasi $(a+x)^{\frac{1}{2}} = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.}$ Dunque, quadrando ciascun membro, ordinando per rapporto ad x, e mettendo tutto nel secondo membro, si avrà:

$$o = \left\{\begin{matrix} +A^2+2AB \\ -1 \\ -a \end{matrix}\right\} x + \left\{\begin{matrix} 2AC \\ + B^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix} 2AD \\ +2BC \end{matrix}\right\} x^3 + \text{ec.}$$

Donde si ricava $A^2 - a = o$, $(2AB-1)\, x = o$, $(2AC+B^2)x^2 = o$, $(2AD+2BC)x^3 = o$, ec.; equazioni che danno . . . .

$$A = \sqrt{a}\,,\ B = \frac{1}{2\sqrt{a}},\ C = -\frac{1}{8a\sqrt{a}},\ D = \frac{1}{16a^2\sqrt{a}}, \text{ec.}$$

Dunque $(a+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} + \frac{x}{2\sqrt{a}} - \frac{x^2}{8a\sqrt{a}} + \frac{x^3}{16a^2\sqrt{a}} - \text{ec.}$

Sia proposta la quantità $\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{(b+cx+dx^2)}}$ da trasformare in serie, essendo x minore di ciascuna delle altre quantità a, b, c, d. Quest' operazione potrebbe farsi collo svolgere successivamente il numeratore ed il denominatore in serie, e con dividere in seguito la prima serie per la seconda. Ma si giugnerà molto più facilmente e più speditamente al medesimo fine, col metodo dei coefficienti indeterminati. Fingo adunque che abbiasi . . . .

$$\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{(b+cx+dx^2)}} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ec.}$$

Supposizioni.	Risultati.	Supposizioni.	Risultati.
$x=0$	$+37$	$x=-0$	$+37$
$x=1$	$+29$	$x=-1$	$+15$
$x=2$	$+3$	$x=-2$	-25
$x=3$	-5	$x=-3$	-47
$x=4$	$+65$	$x=-4$	$+9$
$x=5$	$+297$		

Laonde dobbiamo concludere che uno de' valori di x è comprese fra 2 e 3; un secondo, fra 3 e 4; un terzo, fra -1 e -2; in fine, il quarto fra -3 e -4.

Esempio. III. *Risolvere, con una prima approssimazione, l'equazione* $x^4-15x^2+7x+37=0$.

Facendo successivamente $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5$, ec., si troveranno sempre de' risultati positivi, ma non bisogna affrettarsi a concluderne che l'equazione non ha radici positive; perciocchè può succedere che i valori supposti per x, vadano per salti troppo grandi. Il mezzo più breve di assicurarsene è di cambiare (11) l'equazione in un'altra, le cui radici siano, per esempio, dieci volte maggiori, e di esaminare se, aumentando successivamente d'una unità la nuova incognita, non si giunga a de' risultati di segni contrarj. Fo dunque $x=\frac{y}{10}$; il che cangia l'equazione proposta in questa: $y^4-1500y^2+7000y+370000=0$. In seguito suppongo successivamente $y=0$, $y=1$, $y=2$, $y=3$ .... $y=10$, $y=11$, $y=12$ ...... $y=20$, $y=21$, $y=22$, ec.; e trovo che le due supposizioni $y=24$, $y=25$, danno de' risultati di segni contrarj. Quindi uno de' valori di y è fra 24 e 25; e per conseguenza il valore corrispondente di x (dieci volte minore) è fra 2,4 e 2,5. Si adopri, se è necessario,

il medesimo metodo per le altre radici dell' equazione proposta.

Esempio IV. *Trovare, nell' equazione* $x^2+3x+7=0$, *le cui radici sono immaginarie, le espressioni prossime di queste radici.*

Fingo che l' equazione proposta provenga da questa; $(x+p+q\sqrt{-1})\times(x+p-q\sqrt{-1})=0$, ossia, $x^2+2px+pp+qq=0$, essendo p e q quantità reali, che si devono determinare, almeno ad un di presso. Ora l' equazione proposta e l' equazione fittizia dovendo essere identiche, si avrà paragonandole, $2p=3$, $pp+qq=7$: Noi conosciamo primieramente p, perchè il suo valore è $\frac{3}{2}$, ossia 1, 5; sostituiamo questo valore nell' equazione $pp+qq=7$; avremo $qq=7-\frac{9}{4}=\frac{19}{4}$ ossia $q^2-\frac{19}{4}=0$. Questa equazione ha (31) due radici reali, una positiva, l' altra negativa; e facendo successivamente $q=0$, $q=1$, $q=2$, $q=3$, ec. poi $q=-1$, $q=-2$, ec., si trova che la radice positiva è tra 2 e 3, e la negativa tra -2 e -3.

Quest' esempio è semplicissimo; si opererà allo stesso modo ne' casi analoghi più composti. Qualunque sia il grado d' un' equazione che contiene delle radici immaginarie, queste radici vanno sempre a due a due, e possono essere considerate come prodotte da equazioni del secondo grado; e quindi sono sempre riducibili alla forma che si è attribuita alle radici dell' equazione precedente. Quindi, fingendo che un' equazione, le cui radici sono immaginarie, sia il prodotto di molte coppie di radici immaginarie, simili a quelle dell' esempio precedente, e paragonando, termine con termine, l' equazione proposta coll' equazione fit-

tizia, si avranno molte equazioni che serviranno ad eliminare tutti i coefficienti incogniti delle radici fittizie, all' accezione d' un solo che si troverà in un equazione finale, la quale avrà, almeno, una radice reale. Si prenderà questa radice pel valore del coefficiente di cui si è parlato, in seguito risalendo alle altre equazioni dei coefficienti, si giungerà a determinarli tutti, ad un dipresso. Egli è chiaro che i loro valori saranno delle quantità reali, e che le radici dell' equazione non sono immaginarie se non perchè i coefficienti delle equazioni fittizie sono in parte moltiplicati per $\sqrt{-1}$.

34. SCOLIO I. La trasformazione adoprata nell' esempio III, ha non solo il vantaggio di togliere facilmente la difficoltà che s' incontra nelle questioni di questa natura, ma servo eziandio a trovare in un modo più prossimo le radici d' un' equazione; e ripetendola molte volte, si spingerà l' approssimazione tanto oltre, quanto si vuole. Per rendere la cosa più chiara, ripigliamo l' equazione x^3+5x+7 o. (Esempio I.). Io la cambio in un altra che abbia le radici dieci volte maggiori, col fare $x=\frac{y}{10}$; il che dà $y^3+500y+7000=0$; determino due numeri che non differiscono se non di 1, e fra i quali sia compreso il valore di y. e siccome ho già trovato che il valore di x è tra -1 e -2, vedo subito che quello di y è tra -10 e -20. Ristringiamo questo intervallo. La supposizione $y=-10$, dà per l' equazione in y, un risultato positivo, e la supposizione $y=-20$ dà un risultato negativo. Facciamo $y=-15$, noi avremo un risultato negativo; dunque il valore di y e tra -10 e -15. Sia $y=-12$, si avrà ancora un risultato negativo; dunque il valore di y è tra -10 e -12. Sia $y=-11$; si avrà un risultato positivo;

dunque il valore di y è tra -11 e -12; e quello di x è tra $-1, 1$; e $-1, 2$.

Per spingere più oltre l'approssimazione, cambio l'equazione in y, in un'altra che abbia le radici dieci volte maggiori dei valori di y, o cento volte maggiori di quelli di x. Fo dunque $y = \frac{z}{10}$; e l'equazione in y si cambia in questa: $z^3+50000z+7000000=0$. E siccome il valore di y è tra -11 e -12, quello di z sarà tra -110 e -120. La supposizione $z=-110$ dà, per l'equazione in z, un risultato positivo, e la supposizione $z=-120$ dà un risultato negativo. Facciamo $z=-115$: avremo un risultato negativo; dunque il valore di z è tra -110 e -115. Sia $z=-112$: avremo un risultato negativo; dunque il valore di z è tra -110, e -112. Sia $z=-111$; il risultato è positivo; dunque il valore di z è tra -111 e -112; quello di y tra $-11, 1$; e $-11, 2$, e quello di x tra $-1, 11$; e $-1, 12$. Si conosce dunque x a meno di $\frac{1}{100}$ circa, e continuando sempre ad operare nella stessa maniera, si potrà trovare un valore che differisca quanto poco si vorrà da quello di x.

Farò osservare di passaggio che la trasformazione d'un'equazione in un'altra che abbia le radici 10 volte, 100 volte, 1000 volte ec. maggiori, serve a cambiare un'equazione che contiene delle parti decimali in un'altra che non ne contenga. Sia, per esempio, l'equazione $x^3+5, 745x^2+6, 7847x+9, 7428=0$: il coefficiente del secondo termine contenendo tre figure decimali, cambio l'equazione in un'altra che abbia le radici 1000 volte maggiori; fo dunque $x = \frac{y}{1000}$; il che mi dà

$y^3+5745\,y+6784700+9742800000=0$: equazione nella quale non vi sono parti decimali.

35. SCOLIO II. Quando si è trovato, a meno di $\frac{1}{10}$ circa, una delle radici d'un' equazione, il metodo seguente, dovuto a NEWTON, dà con un calcolo molto spedito il valore di questa radice, prossimo quanto si vuole. Per esempio, sia ancora la nostra equazione $x^3+5x+7=0$, nella quale il valore di x è a meno di $\frac{1}{10}$ circa, $-1,1$, come l'abbiamo trovato.

Si prenda $x=-1,1+z$, essendo z ciò che si dovrebbe aggiungere a $-1,1$, per avere un valore esatto di x. Per mezzo di questo valore, si elimini x dall'equazione proposta $x^3+5x+7=0$; si avrà la trasformata $z^3-3,3z^2+8,63z+0,169=0$. Ora, siccomè la quantità z è minore di $\frac{1}{10}$, e che per conseguenza il suo quadrato è minore di $\frac{1}{100}$, il suo cubo minore di $\frac{1}{1000}$: così egli è chiaro che i due termini che contengono z^3 e z^2 sono molto più piccoli degli altri, e quindi possono essere trascurati. Avremo in conseguenza $8,63z+0,169=0$; il che dà $z=-\frac{0,196}{0,63}=-\frac{196}{8630}=-0,8019$ ad un di presso. Dunque $x=-1,1+z=-1,119$, ad un di presso.

L'approssimazione può essere spinta più oltre con diversi mezzi che tutti dipendono dallo stesso

metodo. Primieramente possiamo scrivere l'equazione generale in z, sotto questa forma . . . .
$z=\frac{-0,169}{z^2-3,3z+8,63}$. Sostituendo nel denominatore, in luogo di z, il suo primo valore prossimo $-0,019$, ed in luogo di z^2 il suo valore parimente prossimo $0,000361$, si avrà $z=\frac{-0,160}{8,693061}=-0,0194$ ad un di presso. Dunque $x=-1,1194$, ad un di presso.

La medesima equazione generale in z può essere risoluta, senza trascurare alcun altro termine, fuorchè z^3. Con ciò, si ha l'equazione del secondo grado, $-3,3z^2+8,63z+0,169=0$, la quale dà $z=-0,0195$, ad un di presso. Dunque $x=-1,1195$, ad un di presso.

Finalmente, in quella maniera che ci siamo serviti del primo valore $-1,1$, prossimo di x, per trovare il secondo valore $-1,119$ che è più esatto; possiamo servirci di questo per trovarne un terzo ancor più esatto. Supponiamo adunque $x=-1,119+u$; e mettiamo questo valore nell'equazione proposta $x^3+5x+7=0$. E siccome i termini che conterranno u^3 ed u^2, possono essere rigettati senza scrupolo, dispensiamoci dallo scrivere questi termini, per risparmiarci de' calcoli inutili. La trasformazione in u sarà dunque semplicemente, $8,756483\,u+0,00383841=0$. Laonde si ricava, ad un di presso, $u=-0,00044$. Dunque $x=-1,11944$, ad un di presso.

Egli è chiaro che col mezzo di questo terzo valore prossimo di x, si può trovarne un quarto ancora più prossimo, e così di seguito.

CAPO V.

Risoluzione prossima delle equazioni letterali.

36. I metodi di approssimazione per le equazioni numeriche, si applicano del pari alle equazioni letterali omogenee che contengono semplicemente due lettere, cioè a dire l'incognita, ed un' altra lettera cognita. Per esempio, se venga proposta l'equazione $x^4-5a^2x^2+7a^3x+11a^4=0$; la quale contiene la sola incognita x, e la quantità cognita a; si supporrà $a=1$, e con ciò si avrà l'equazione numerica $x^4-5x^2+7x+11=0$. Quando si saranno trovate le radici di quest' equazione, si moltiplicheranno per a, e si avranno quelle della proposta. Quì adunque non si tratta di questo genere di equazioni.

Si deve osservare che se un' equazione ove appariscono due sole lettere, non fosse omogenea, ella sarebbe riputata contenere tre lettere, perchè i termini nei quali le dimensioni sono le minori, devono essere supposti moltiplicati per le potenze d'una lettera che si è riguardata come unità, e che è sottintesa. Parimente, un' equazione ove non appariscono che tre lettere, e che non è omogenea, deve essere riputata contenere quattro lettere; così di seguito.

37. PROBLEMA. *Trovare, per mezzo d'una serie infinita convergente, il valore prossimo d'una delle radici d'un' equazione che contiene più di due lettere.*

Sia, per esempio, l'equazione omogenea ed a tre lettere $x^3+a^2x+abx-2a^3-b^3=0$. Le due quantità date a e b devono essere riguardate come disuguali: perciocchè se fosse $a=b$, l'una o l'altra

di queste lettere potrebbe essere cacciata dall'equazione, la quale non conterrebbe più allora se non due lettere.

I.° Caso: $a>b$. Fingo che abbiasi $x=A+Bb+Cb^2+Db^3+$ec. essendo A, B, C, D, ec. de' coefficienti incogniti che trattasi di determinare. Per mezzo di questo valore di x l'equazione proposta $x^3+a^2x+abx-2a^3-b^3=0$, dà, ordinando il secondo membro per rapporto a b.

$$\begin{array}{lllllll}
x^3 = & +A^3 & +3A^2B.b & +3AB^2.b^2 & +B^3b^3 & +\text{ec.} \\
 & & & +3A^2C.b^2 & +3A^2D.b^3 & +\text{ec.} \\
 & & & & +6ABC.b^3 & +\text{ec.} \\
+a^2x = & +a^2A & +a^2Bb & +a^2C.b^2 & +a^2D.b^3 & +\text{ec.} \\
+abx = & & +aAb & +aB.b^2 & +aC.b^3 & +\text{ec.} \\
-2a^3 = & -2a^3 & & & & \\
-b^3 = & \ldots & \ldots & \ldots & -1.b^3 &
\end{array}$$

E siccome si ha $x^3+a^2x+abx-2a^3-b^3=0$, ne segue che la somma di tutte le serie che compongono il secondo membro dell'espressione precedente, deve essere altresì eguale a zero. Dunque ciascun termine particolare di questa somma deve essere zero. Difatti, il valore di b può essere tanto piccolo quanto si vuole, e se esso si suppone infinitamente piccolo, si vedrà, paragonando tra loro i termini del secondo membro, che il primo dee riguardarsi come infinito per rapporto al secondo, il secondo come infinito per rapporto al terzo, il terzo come infinito per rapporto al quarto, e così di seguito. Onde ne risulta che un termine qualunque non può essere distrutto nè da quelli che lo precedono, nè da quelli che lo seguono, e che conseguentemente la totalità dei termini non sarebbe zero, se ciascuno di essi in particolare non fosse zero. Si avranno dunque, per determinare A, B, C, D, ec. le equazioni particolari, $A^3+a^2A-2a^3=0$; $(3A^2 . B+a^2B+aA)b=0$;

$$\begin{array}{rcccccc}
x^3 = & A^3 & +3A^2B.a & +3AB^2.a^2 & +B^3a^3 & +\text{ec.} \\
 & & & +3A^2C.a^2 & +3A^2D.a^3 & +\text{ec.} \\
 & & & & +6ABC.a^3 & +\text{ec.} \\
+a^2x = & & & +A.a^2 & +B.a^3 & +\text{ec.} \\
+abx = & & +Ab.a & +Bb.a^2 & +Cb.a^3 & +\text{ec.} \\
-2a^3 = & & & & -2.a^3 & \\
-b^3 = & -b^3 & & & &
\end{array}$$

Dunque per essere $x^3+a^2x+abx-2a^3-b^3=0$, il secondo membro dell' espressione precedente sarà altresì zero. Inoltre, ciascuno dei termini, in particolare, di questa espressione sarà zero. Laonde si avranno le equazioni, $A^3-b^3=0$; $(3A^2B+Ab)a=0$; $(3AB^2+3A^2C+A+Bb)a^2=0$; $(B^3+3A^2D+6ABC+B+Cb-2)a^3=0$; ec.: le quali danno $A=b$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=-\frac{1}{3b}$, $D=\frac{55}{81b^2}$, ec. Dunque, mettendo in vece di A, B, C, D, ec., i loro valori; la serie finita diverrà $x=b-\frac{a}{3}-\frac{a^2}{3b}+\frac{55a^3}{81b^2}-$ ec.

58. COROLLARIO. Il valore trovato per x essendo una delle tre radici dell' equazione proposta $x^3+a^2x+abx-2a^3-b^3=0$: se dicasi M questa radice, e si divida l' equazione per $x-M=0$, si otterrà un' equazione di un grado più basso, della quale si conosceranno, ad un di presso, i coefficienti e l' ultimo termine, e della quale si determineranno le radici con un metodo simile al precedente, supposto che queste radici siano reali. Lo stesso dicasi delle equazioni dei gradi più elevati.

59. Si è dovuto osservare l' uso e l' utilità dei *coefficienti indeterminati*, soprattutto per la formazione delle serie. Questo metodo è, per così dire, l' anima di tutta l' Analisi. Non si saprebbe adunque rendersselo troppo famigliare. Eccone alcune applicazioni le quali sono un poco estranee all'oggetto presente, ma si perdonerà questa piccola digressione, in grazia della sua utilità.

Sia la quantità $\frac{1}{a+x}$, da trasformare in una serie la quale cammini secondo le potenze di x che si suppone minore di a. Fingo che abbiasi, $\frac{1}{a+x}$ $=A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ec. Dunque moltiplicando tutto per $a+x$, ordinando per rapporto ad x, e mettendo tutti i termini nel secondo membro, si avrà:

$$o=\left\{\begin{matrix}+aA\\-1\end{matrix}\right.\left.\begin{matrix}+aB\\+A\end{matrix}\right\}x\left.\begin{matrix}+aC\\+B\end{matrix}\right\}x^2\left.\begin{matrix}+aD\\+C\end{matrix}\right\}x^3+\text{ec.}$$

Uguagliamo a zero ciascuna delle parti del secondo membro; avremo $aA-1=o$; $(aB+A)x=o$; $(aC+B)x^2=o$, $(aD+C)x^3=o$, ec. equazioni che danno . . . .

$$A=\frac{1}{a},\ B=-\frac{A}{a}=\frac{1}{a^2},\ C=-\frac{B}{a}=+\frac{1}{a^3}:$$

$D=-\frac{C}{a}=-\frac{1}{a^4}$, ec. Laonde si avrà . . . .

$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+$ ec., come si trova per mezzo della divisione.

Sia la quantità $(a+x)^{\frac{1}{2}}$ da svolgere in serie, essendo $x<a$. Quest' operazione può farsi col metodo dell'estrazione della radice, ovvero colla formola del binomio; ma si può ottenere il medesimo intento per mezzo dei coefficienti indeterminati. Fingo, perciò, che abbiasi $(a+x)^{\frac{1}{2}} = A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ec. Dunque, quadrando ciascun membro, ordinando per rapporto ad x, e mettendo tutto nel secondo membro, si avrà:

$$o = \left\{\begin{matrix} +A^2+2AB \\ -1 \\ -a \end{matrix}\right\} x + 2AC \left\{\begin{matrix} \\ + B^2 \\ \end{matrix}\right\} x^2 + 2AD \left\{\begin{matrix} \\ +2BC \\ \end{matrix}\right\} x^3 + \text{ec.}$$

Donde si ricava $A^2 - a = o$, $(2AB-1)\,x = o$, $(2AC+B^2)x^2 = o$, $(2AD+2BC)x^3 = o$, ec.; equazioni che danno . . . .

$$A = \sqrt{a}\,,\ B = \frac{1}{2\sqrt{a}},\ C = -\frac{1}{8a\sqrt{a}},\ D = \frac{1}{16a^2\sqrt{a}},\text{ec.}$$

Dunque $(a+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} + \frac{x}{2\sqrt{a}} - \frac{x^2}{8a\sqrt{a}} + \frac{x^3}{16a^2\sqrt{a}} - \text{ec.}$

Sia proposta la quantità $\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{(b+cx+dx^2)}}$ da trasformare in serie, essendo x minore di ciascuna delle altre quantità a, b, c, d. Quest' operazione potrebbe farsi collo svolgere successivamente il numeratore ed il denominatore in serie, e con dividere in seguito la prima serie per la seconda. Ma si giugnerà molto più facilmente e più speditamente al medesimo fine, col metodo dei coefficienti indeterminati. Fingo adunque che abbiasi . . . .

$$\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{(b+cx+dx^2)}} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ec.}$$

Quadrando ciascun membro, poi moltiplicando tutto pel denominatore risultante $b+cx+dx^2$, e mettendo tutto nel secondo membro, ordinato per rapporto ad x, si troverà :

$$0=\left\{\begin{matrix} A^2b+2ABb \\ +A^2c \\ \\ \\ -a-1 \end{matrix}\right\}x+\left\{\begin{matrix} 2ACb \\ +B^2b \\ +2ABc \\ +A^2d \\ + \end{matrix}\right\}x^2+\left\{\begin{matrix} 2BCb \\ +2ADb \\ +B^2c \\ +2ACc \\ +2ABd \end{matrix}\right\}x^3+\text{ec.}$$

Donde si ricava $A^2b-a=0$, $(2ABb+A^2c-1)x=0$, $(2ACb+B^2b+2ABc+A^2d)x^2=0$, $(2BCb+2ADb+B^2c+2ACc+2ABd)x^3=0$, ec.; equazioni che danno ...

$$A=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ B=\frac{b-ac}{2b\sqrt{ab}},\ C=-\frac{(b-ac)^2}{8ab^2\sqrt{ab}}\ \ldots$$

$$-\frac{c(b-ac)}{2b^2\sqrt{ab}}-\frac{ad}{2b\sqrt{ab}},\ D=\frac{(b-ac)}{4ab^2}\ \ldots\ldots$$

$$\times\left(\frac{(b-ac)^2}{4ab\sqrt{ab}}+\frac{c(b-ac)}{b\sqrt{ab}}+\frac{ad}{\sqrt{ab}}\right)+\left(\frac{b-ac}{4b^2a}\right)$$

$$\times\left(\frac{bc+3ac^2}{2b\sqrt{ab}}\right)+\frac{acd}{2b^2\sqrt{ab}},\ \text{ec.}\ \ldots\ldots$$

Sostituendo questi valori di A, B, C, D, ec. nella serie supposta, si avrà l' espressione di . . . . $\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{(b+cx+dx^2)}}$ in grandezze tutte date.

CAPO VI.

Metodo di HALLEY, per estrarre, per approssimazione qualsivoglia radice da un binomio qualunque.

40. La formola di NEWTON, come si è veduto (Algeb. 190), serve eziandio ad estrarre per approssimazione le radici d' un grado qualunque. Ma siccome le approssimazioni che si ottengono con questa formola, sono qualche volta troppo lente, così sarà cosa utile l' aggiugnere qui il metodo di HALLEY, generalizzato dall' abbate MARIE.

41. PROBLEMA. *Estrarre per approssimazione la radice* m *da una quantità qualunque* $a^m \pm b$.

Si può supporre che questa radice sia rappresentata dalla quantità $a + d$, esprimendo a un numero intero, e d la frazione decimale che bisogna aggiungere a questo numero per avere la radice cercata.

Ciò posto, si avrà $a + d = \sqrt[m]{(a^m \pm b)}$; onde $(a+d)^m = a^m \pm b$; dunque $a^m + ma^{m-1}\, d \ldots \ldots + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2}\, d^2 +$ ec.: $= a^m \pm b$. Trascurando i termini ove la frazione d è elevata alle potenze superiori al quadrato, cancellando dall' una e dall' altra parte a^m, e dividendo il resto per m si avrà $a^{m-1}\, d + \frac{m-1}{2} a^{m-2}\, d^2 = \pm \frac{b}{m}$.

Moltiplicando in seguito per 2, dividendo per $(m-1)\, a^{m-2}$, ed ordinando si troverà . . . . . . $d^2 + \frac{2a}{m-1} d = \pm \frac{2b}{(m^2-m)a^{m-2}}$. Compiendo il qua-

drato, estraendo la radice, e trasponendo, verrà

$$d = \frac{-a}{m-1} + \sqrt{\left[\frac{a^2}{(m-1)} + \frac{2b}{(mm-m)a^{m-2}}\right]}$$

Finalmente aggiungendo a ai due membri di questa equazione, si avrà, generalmente per l'estrazione d'una radice prossima qualunque . . . .

$$a + d = \sqrt[m]{a^m \pm b} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{m-2}{m-1}a + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(mm-m)a^{m-2}}\right)}$$

Da questa formola generale di cui HALLEY non parla, nascono con semplici sostituzioni tutte le formole particolari ch' egli ha inserite in una sua Memoria, che leggesi nelle *Transazioni Filosofiche* del 1694. La loro utilità principale consiste nel dare delle approssimazioni che non si avrebbero dalle Tavole più estese dei Logaritmi. Eccole in dettaglio.

$$\sqrt[3]{(a^3 \pm b)} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa \pm \frac{b}{3a}\right)}$$

$$\sqrt[4]{(a^4 \pm b)} = \frac{2}{3}a + \sqrt{\left(\frac{1}{9}aa \pm \frac{b}{6a^2}\right)}$$

$$\sqrt[5]{(a^5 \pm b)} = \frac{3}{4}a + \sqrt{\left(\frac{1}{16}aa \pm \frac{b}{10a^3}\right)}$$

$$\sqrt[6]{(a^6 \pm b)} = \frac{4}{5}a + \sqrt{\left(\frac{1}{25}aa \pm \frac{b}{15a^4}\right)}$$

$$\sqrt[7]{(a^7 \pm b)} = \frac{5}{6}a + \sqrt{\left(\frac{1}{36}aa \pm \frac{b}{21a^5}\right)}$$

ec. ec. ec.

Esempio. *Si debba trovare la radice quinta di 161900 con 12 decimali.*

Divido per 5 il logaritmo di 161900 che è 5,2092468, ed ho 1,0418494, logaritmo di 11,012 radice prossima. Fò 11,012$=a$: alzo 11,012 alla quinta potenza, ed ho $a^5 = 161951,37873202072883\text{2}$, che supera 161900 di 31,378732020728832. Pongo questo eccesso $= b$, ed ho $a^5 - b = 161900$

dunque colla formola $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = \frac{3}{4} a + \ldots \sqrt{\left(\frac{1}{16} aa - \frac{b}{10a^3}\right)}$, ho, sostituendo i numeri $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$8,259 + \sqrt{\left(7,579009 - \frac{31,378732020728832}{13353,60753728}\right)}$$

$$= 8,259 + \sqrt{(7,579009}$$

$- 0,0023498318288243159532711) = 8,259 + \sqrt{(7,5766591681711756840672\text{89})} = 8,259 + 2,752573190339 = 11,011573190339$, radice cercata.

APPENDICE

ALLA TRIGONOMETRIA.

Dai Problemi I. e II. della Trigonometria si ricavano i Corollarii seguenti.

COROLLARIO I. Supponendo, per semplificare i calcoli, $R=1$, e ponendo x ed y, in vece di A e B, le equazioni dell' articolo 252, diventano:

I. $\text{sen.}\,(x+y) = \text{sen.}\,x\,\cos.\,y + \text{sen.}\,y\,\cos.\,x.$

II. $\text{sen.}\,(x-y) = \text{sen.}\,x\,\cos.\,y - \text{sen.}\,y\,\cos.\,x,$

III. $\cos.\,(x+y) = \cos.\,x\,\cos.\,y - \text{sen.}\,x\,\text{sen.}\,y,$

IV. $\cos.\,(x-y) = \cos.\,x\,\cos.\,y + \text{sen.}\,x\,\text{sen.}\,y.$

COROLLARIO II. Sommando le equazioni I. e II., le equazioni III., e IV., e sottraendo la III. dalla IV.: si formeranno le tre seguenti

$$\text{V.}\ \text{sen.}\,x\,\cos.\,y = \frac{1}{2}\,\text{sen.}\,(x+y) + \frac{1}{2}\,\text{sen.}\,(x-y),$$

$$\text{VI.}\ \cos.\,x\,\cos.\,y = \frac{1}{2}\,\cos.\,(x+y) + \frac{1}{2}\,\cos.\,(x-y),$$

$$\text{VII.}\ \text{sen.}\,x\,\text{sen.}\,y = \frac{1}{2}\,\cos.\,(x-y) - \frac{1}{2}\,\cos.\,(x+y).$$

Queste tre ultime formole sono utili, quando si vogliono trasformare dei prodotti di seni, in seni semplici.

COROLLARIO III. Per gli articoli 250 e 252, si ha

$$\text{tang.}\,(x+y) = \frac{\text{sen.}\,(x+y)}{\cos.\,(x+y)} = \frac{\text{sen.}\,x\cos.\,y + \cos.\,x\,\text{sen.}\,y}{\cos.\,x\cos.\,y - \text{sen.}\,x\,\text{sen.}\,y},$$

$$\text{sec.}\ (x+y)=\frac{1}{\cos.(x+y)}=\frac{1}{\cos.x\cos.y-\text{sen}.x\text{sen}.y},$$

$$\cot.\ (x+y)=\frac{\cos.(x+y)}{\text{sen}.(x+y)}=\frac{\cos.x\cos.y-\text{sen}.x\text{sen}.y,}{\text{sen}.x\cos.y+\cos.x\text{sen}.y,}$$

$$\text{cosec}.(x+y)=\frac{1}{\text{sen}.(x+y)}=\frac{1}{\text{sen}.x\cos.y+\cos.x\text{sen}.y}.$$

Queste quattro equazioni possono essere scritte sotto le formi seguenti :

$$\text{tang}.(x+y)=\frac{\frac{\text{sen}.x}{\cos.x}+\frac{\text{sen}.y}{\cos.y}}{1-\frac{\text{sen}.x.\text{sen}.y}{\cos.x.\cos.y}}.$$

$$\text{sec}.\ (x+y)=\frac{1}{\cos.x\cos y\times\left(1-\frac{\text{sen}.x\text{sen}.y}{\cos.x\cos.y}\right)}.$$

$$\cos.(x+y)=\frac{1-\frac{\text{sen}.x\text{sen}.y}{\cos.x\cos.y}}{\frac{\text{sen}.x}{\cos.x}+\frac{\text{sen}.y}{\cos.y}}$$

$$\text{cosec}.(x+y)=\frac{1}{\cos.x\cos y\times\left(\frac{\text{sen}.x}{\cos.x}+\frac{\text{sen}.y}{\cos.y}\right)}.$$

Mettendo in queste nuove equazioni, per $\frac{\text{sen}.x}{\cos.x}$, il suo valore tang.$x$; per $\frac{\text{sen}.y}{\cos.y}$, il suo valore tang.

y; per $\frac{1}{\cos.x}$ il suo valore sec. x; e per $\frac{1}{\cos.y}$, il suo valore sec. y; esse diverranno:

$$\text{VIII. } \tan g.\ (x+y) = \frac{\tan g.x + \tan g.y}{1 - \tan g.x \tan g.y},$$

$$\text{IX. } \sec.\ (x+y) = \frac{\sec.x \sec.y}{1 - \tan g.x \tan g.y},$$

$$\text{X. } \cot.\ (x+y) = \frac{1 - \tan g.x \tan g.y}{\tan g.x + \tan g.y},$$

$$\text{XI } \operatorname{cosec}.\ (x+y) = \frac{\sec.x \sec.y}{\tan g.x + \tan g.y}.$$

Allo stesso modo si troveranno le quattro seguenti

$$\text{XII. } \tan g.(x-y) = \frac{\tan g.x - \tan g.y}{1 + \tan g.x \tan g.y},$$

$$\text{XIII. } \sec.\ (x-y) = \frac{\sec.x \sec.y}{1 + \tan g.x \tan g.y},$$

$$\text{XIV. } \cot.\ (x-y) = \frac{1 + \tan g.x \tan g.y}{\tan g.x - \tan g.y},$$

$$\text{XV. } \operatorname{cosec}.\ (x-y) = \frac{\sec.x \sec.y}{\tan g.x - \tan g.y}.$$

Si rileva da queste equazioni, che avendo le tangenti degli archi x ed y, e quindi anche le loro secanti, giacchè (Fig. 142) sec. $x = \sqrt{(1 + \tan g.^2 x)}$, e sec. $y = \sqrt{(1 + \tan g.^2 y)}$, si avranno le tangenti, secanti, cotangenti, cosecanti della somma e della differenza degli archi medesimi.

COROLLARIO IV. Supponendo $x = y$, le equazioni I. e III. del Corollario I. e le equazioni VIII. IX. X. XI. del Corollario precedente si trasformeranno nelle seguenti:

XVI. $\text{sen}.2x = 2\text{sen}.x.\cos.x$,

o $\text{sen}.x = 2\text{sen}.\frac{1}{2}x.\cos.\frac{1}{2}, x$

XVII. $\cos.2x = \cos.^2 x - \text{sen}.^2 x$,

o $\cos.x = \cos.^2\frac{1}{2}x - \text{sen}.^2\frac{1}{2}, x$

XVIII. $\text{tang}.2x = \frac{2\text{tang}.x}{1 - \text{tang}.^2 x}$

o $\text{tang}.x = \frac{2\text{tang}.\frac{1}{2}x}{1 - \text{tang}.^2\frac{1}{2}x}$

XIX. $\sec.2x = \frac{\sec.^2 x}{1 - \text{tang}^2 x}$,

o $\sec.x = \frac{\sec.^2\frac{1}{2}x}{1 - \text{tang}^2\frac{1}{2}x}$

XX. $\cot.\ 2x = \frac{1 - \text{tang}.^2 x}{2\text{tang}.x}$,

o $\cot.x = \frac{1 - \text{tang}^2\frac{1}{2}x}{2\text{tang}.\frac{1}{2}x}$

XXI. $\text{cosec}.2x = \frac{\sec.^2 x}{2\text{tang}.x}$,

o $\text{cosec}.x = \frac{\sec.^2\frac{1}{2}x}{2\text{tang}.\frac{1}{2}x}$

Si vede dalla XVI. di queste equazioni, che, dato il seno dell' arco semplice x, e conseguentemente anche il suo coseno, si conoscerà il seno dell' arco doppio $2x$.

La XVII. servirà a trovare il coseno dell' arco semplice, quando si conoscerà il seno dell' arco doppio, e conseguentemente anche il suo coseno. Imperciocchè ella dà . . . .

$\cos.x = \sqrt{\left(\frac{1+\cos.2x}{2}\right)}$ (*) e quindi . . . .

XXII. $\cos.\frac{1}{2}x = \sqrt{\left(\frac{1+\cos.x}{2}\right)}$.

La medesima servirà ancora a trovare il seno dell' arco semplice, quando si conoscerà il seno dell' arco doppio, e conseguentemente il suo coseno. Imperciocchè ella dà . . . .

$\text{sen}.x = \sqrt{\left(\frac{1-\cos.2x}{2}\right)}$; onde . . . . . .

XXIII. $\text{sen}.\frac{1}{2}x = \sqrt{\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)}$.

La XVIII. serve a trovare la tangente dell' angolo doppio, quando si conosce la tangente dell' angolo semplice. E così delle altre.

COROLLARIO V. Se conoscendo la tangente d'un angolo, si domandasse la tangente della sua metà; questo problema potrebbe risolversi per mezzo dell' equazione XVIII. del Corollario precedente. Imperciocchè essa dà . . . .

$(1-\text{tang.}^2x)\text{tang.}2x = 2\text{tang.}x$, ovvero

$\text{tang.}^2x + \frac{2\text{tang.}x}{\text{tang.}2x} = 1$;

(*) Si ottiene questo valore di $\cos.x$ combinando l' equazione XVII coll' altra di $\cos^2x = 1-\text{sen}^2x$.

e risolvendo quest' equazione di secondo grado si ha

$$\text{XXIV. } \tan g.\, x = \frac{-1+\sqrt{(1+\tan g.^2 2x)}}{\tan g. 2x}$$

Laonde si vede, che data la tangente dell' arco $2x$ si conoscerà la tangente della sua metà x.

Per mezzo di quest' ultima tangente, e delle proposizioni stabilite, si troverà la secante, la cotangente, e la cosecante dell' arco x.

COROLLARIO VI. Moltiplicando l' equazione I. per la IV. (Corollario I), si trova riducendo, $\text{sen.}\,[x+y]\ \cos.\,[x-y] = \text{sen}x\cos.x + \text{sen}.y.\cos.y.$ $= [\text{Corollario IV.}]\ \frac{1}{2}\ [\text{sen}.2x+\text{sen}2y]$; e quindi $\text{sen}.\,2x+\text{sen}2y = 2\text{sen}.\,[x+y]\cos.[x-y]$. Dunque [Corollario IV]

$$\text{XXV. } \text{sen}.x+\text{sen}y = 2\text{sen}.\frac{1}{2}[x+y]\cos.\frac{1}{2}[x-y].$$

Similmente procedendo sopra le equazioni II, e III. si troverà.

$$\text{XXVI. } \text{sen}.x-\text{sen}.y = \text{sen}.\frac{1}{2}[x-y]\cos.\frac{1}{2}[x+y].$$

Allo stesso modo, moltiplicando l' equazione III. per la IV. [ibid.], si troverà riducendo, $\cos.[x+y]\ \cos.[x-y] = \cos.^2x - \text{sen}.y$, Ma [Corollario IV.] $\cos.^2 x = \frac{1}{2}[1+\cos.2x]$, e $\text{sen}.^2y = \frac{1}{2}[1-\cos 2y]$. Dunque, sostituendo: si avrà, $\frac{1}{2}\cos.2y + \frac{1}{2}\cos.2x = \cos.\ [x+y]\cos.\,[x-y]$; e quindi

$$\text{XXVII } \cos.x + \cos.y = 2\cos.\ \frac{1}{2}[x+y]\cos.\ \frac{1}{2}[x-y].$$

Operando sulle equazioni I. e II., come si è fatto per le due formole precedenti, si troverà.

XXVIII. $\cos.x - \cos.y = 2 \text{sen.} \frac{1}{2}[x-y] \text{sen.} \frac{1}{2}[x+y]$.

Queste ultime quattro formole servono a sostituire a delle somme o a delle differenze di seni e coseni, de' prodotti di altri seni e coseni, affinchè vi si possa applicare il calcolo coi logaritmi.

COROLLARIO. VII. Immaginiamoci, che dei due archi x ed y, uno, per esempio, y, diventi successivamente x, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, ec. ec. cosicchè abbiasi.

$$\begin{aligned} &x = x, \\ x + y = x + {}&x = 2x, \\ x + y = x + {}&2x = 3x, \\ x + y = x + {}&3x = 4x, \\ x + y = x + {}&4x = 5x, \\ &\text{ec.} \end{aligned}$$

si avrà, per l'equazione I [Coroll. I.]

$$\begin{aligned} \text{sen.}\ x &= \text{sen.}\ x. \\ \text{sen.}\ 2x &= 2\ \text{sen.}\ x.\ \cos.\ x \\ \text{sen.}\ 3x &= \text{sen.}\ x.\ \cos.\ 2x + \cos.\ x.\ \text{sen.}\ 2x \\ \text{sen.}\ 4x &= \text{sen.}\ x.\ \cos.\ 3x + \cos.\ x.\ \text{sen.}\ 3x \\ \text{sen.}\ 5x &= \text{sen.}\ x.\ \cos.\ 4x + \cos.\ x.\ \text{sen.}\ 4x \\ &\text{ec.}; \end{aligned}$$

ed in generale, per un arco qualunque nx, si avrà

$\text{sen.}\ nx = \text{sen.}x.\cos.(n-1)x + \cos.x.\text{sen.}(n-1)x.$

E per l'equazione III. del Corollario medesimo, si avrà.

$$\begin{aligned} \cos.\ x &= \cos.\ x, \\ \cos.\ 2x &= \cos.^2 x - \text{sen.}^2 x, \\ \cos.\ 3x &= \cos.\ x.\ \cos.\ 2x - \text{sen.}\ x.\ \text{sen.}\ 2x, \\ \cos.\ 4x &= \cos.\ x.\ \cos.\ 3x - \text{sen.}\ x.\ \text{sen.}\ 3x, \\ \cos.\ 5x &= \cos.\ x.\ \cos.\ 4x - \text{sen.}\ x.\ \text{sen.}\ 4x, \\ &\text{ec.} \end{aligned}$$

ed in generale,

$\cos.nx = \cos.x.\cos.(n-1)x - \text{sen}.x\text{sen}.(n-1)x.$

Laonde si vede, che conoscendo il seno del primo arco, e conseguentemente anche il suo coseno, si conoscerà il seno ed il coseno dell' arco doppio; per mezzo dei seni e coseni dell' arco semplice e dell' arco doppio, si conosceranno i seni e coseni dell' arco triplo; per mezzo dei seni e coseni dell' arco semplice e dell' arco triplo, si conosceranno i seni e coseni dell' arco quadruplo. Così di seguito. Trovati i seni e coseni, si conosceranno le tangenti, secanti, cotangenti e cosecanti. Quindi se si avrà una serie di archi che formino una progressione aritmetica crescente, la cui differenza sia uguale al primo arco, basterà conoscere il seno, e conseguentemente anche il coseno di quest' arco primitivo, per giugnere a conoscere i seni, coseni, tangenti, secanti, cotangenti e cosecanti di tutti gli archi di cui trattasi.

COROLLARIO VIII. Ponendo nel secondo membro delle serie precedenti successivamente, in vece di cos. x e sen. x, i loro valori, si troveranno le quattro Tavole seguenti.

Tav. I.

Seni degli archi moltiplici, espressi in potenze del seno dell' arco semplice.

$\text{sen. } x = \text{sen. } x$,
$\text{sen. } 2.\, x = 2 \text{ sen. } x \sqrt{(1 - \text{sen.}^2 x)}$,
$\text{sen. } 3.\, x = 3 \text{ sen. } x - 4 \text{sen.}^3 x$,
$\text{sen. } 4\, x = (4 \text{sen. } x - 8 \text{sen.}^3 x \sqrt{(1 - \text{sen.}^2 x)}$,
$\text{sen. } 5\, x = \text{sen. } x - 20 \text{sen}^3 x + 16 \text{sen}^5 x$,
ec.

Tav. II.

Seni degli archi moltiplici, espressi in potenze del coseno dell' arco semplice.

$$\text{sen. } x = \sqrt{(1 - \cos.^2 x)},$$
$$\text{sen. } 2x = 2 \cos. x \sqrt{(1 - \cos.^2 x)},$$
$$\text{sen. } 3x = (4 \cos.^2 x - 1)\sqrt{(1 - \cos.^2 x)},$$
$$\text{sen. } 4x = (8 \cos.^3 x - 4 \cos. x)\sqrt{(1 - \cos.^2 x)},$$
$$\text{sen. } 5x = (16 \cos.^4 x - 12 \cos.^2 x +)\sqrt{(1 - \cos.^2 x)},$$

ec.

ed in generale,

$$\text{sen. } nx = \left(2^{n-1}\cos.^{n-1} x - (n-2)2^{n-3}\cos.^{n-3} x + \frac{(n-3)(n-4)}{1.\ 2}\, 2^{n-5} \cos.^{n-5} x - \text{ec.}\right)\sqrt{(1 - \cos.^2 x)}.$$

Tav. III.

Coseni degli Archi moltiplici, espressi in potenze del coseno dell' arco semplice.

$$\cos.\ x = \cos.\ x,$$
$$\cos.\ 2x = 2 \cos.^2 x - 1,$$
$$\cos.\ 3x = 4 \cos.^3 x - 3 \cos.\ x,$$
$$\cos.\ 4x = 8 \cos.^4 x - 8 \cos.^2 x + 1.$$
$$\cos.\ 5x = 16 \cos.^5 x - 20 \cos.^3 x + 5 \cos.\ x,$$

ec.

ed in generale,

$$\cos.\ nx = 2^{n-1} \cos.^{n} x - \frac{n}{1}\ .\ 2^{n-3} \cos.^{n-2} x + \cdots$$
$$\frac{n(n-3)}{1\ .\ 2}\ .\ 2^{n-5} \cos.^{n-4} x = \text{ec.}$$

Tav. IV.

Coseni degli Archi moltiplici, espressi in potenze del seno dell' arco semplice.

cos. $x = \sqrt{(1 - \text{sen.}^2 x)}$,
cos. $2x = 1 - 2\,\text{sen.}^2 x$;
cos. $3x = (1 - 4\,\text{sen.}^2 x)\sqrt{(1 - \text{sen.}^2 x)}$;
cos. $4x = 1 - 8\,\text{sen.}^2 x + 8\,\text{sen.}^4 x$,
cos. $5x = (1 - 12\,\text{sen.}^2 x + 16\,\text{sen.}^4 x)\sqrt{(1 - \text{sen.}^2 x)}$;
ec.

COROLLARIO IX. Dalle quattro Tavole precedenti, sarà ora facile d' avere le potenze del seno e del coseno dell' arco semplice, espresse in seni e coseni dell' arco moltiplice.

Per esempio, dalla Tavola IV. si ha, $2\,\text{sen.}^2 x = 1 - \cos. 2x$. Dalla I., $4\,\text{sen.}^3 x = 3\,\text{sen.}\,x - \text{sen.}\,3x$. Dalla IV., $8\,\text{sen.}^4 x = \cos. 4x + 8\,\text{sen.}^2 x - 1$. Sostituendo in quest' ultima equazione il valore precedente di $\text{sen.}^2 x$; si avrà $8\,\text{sen.}^4 x = \cos. 4x - 4\cos. 2x + 3$. Operando sempre in tal modo, si ottengono le Tavole seguenti, che sono di grand' uso nel calcolo integrale.

Tav. V.

Potenze del seno dell' arco semplice, espresse in seni e coseni dell' arco moltiplice.

$\text{sen.}^1 x = \text{sen.}\,x$,
$2\,\text{sen.}^2 x = 1 - \cos. 2x$,
$4\,\text{sen.}^3 x = 3\,\text{sen.}\,x - \text{sen.}\,3x$,
$8\,\text{sen.}^4 x = 3 - 4\cos. 2x + \cos. 4x$,
$16\,\text{sen.}^5 x = 10\,\text{sen.}\,x - 5\,\text{sen.}\,3x + \text{sen.}\,5x$,
$32\,\text{sen.}^6 x = 10 - 15\cos. 2x + 6\cos. 4x - \cos. 6x$,
$64\,\text{sen.}^7 x = 35\,\text{sen.}\,x - 21\,\text{sen.}\,3x + 7\,\text{sen.}\,5x - \text{sen.}\,7x$;

Tav. VI.

Potenze del coseno dell' arco semplice, espresse in coseni dell' arco moltiplice.

$$\cos.^1 x = \cos. x\,,$$

$$2 \cos.^2 x = 1 + \cos. 2x\,,$$

$$4 \cos.^3 x = 3 \cos. x + \cos. 3x\,,$$

$$8 \cos.^4 x = 3 + 4 \cos. 2x + \cos. 4x\,,$$

$$16 \cos.^5 x = 10 \cos. x + 5 \cos. 3x + \cos. 5x\,,$$

$$32 \cos.^6 x = 10 + 15 \cos. 2x + 6 \cos. 4x + \cos. 6x\,,$$

$$64 \cos.^7 x = 35 \cos. x + 21 \cos. 3x + 7 \cos. 5x + \cos. 7x\,,$$

NOZIONI GENERALI (*)

Sull' analisi indeterminata.

1. Allorchè l' enunciazione di un problema conduce ad un numero d' equazioni minore di quello delle incognite, il problema è indeterminato, cioè suscettibile d' un numero infinito di soluzioni. Per cagion d' esempio, se si cerchino due numeri, la cui somma sia 10, si avrà l' equazione $x+y=10$; e, qualunque valore voglia darsi ad y, se ne troverà sempre un altro per x, atto ad adempiere la condizione proposta. Ma qualora non si vogliano, per entrambe le incognite, che numeri interi e positivi, è manifesto che nove saranno le soluzioni possibili, cioè

$$\begin{array}{l} x = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \\ y = 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1. \end{array}$$

E non è men chiaro, che le quattro ultime debbono riguardarsi come identiche colle prime quattro; poichè basta a mostrarne l' identità, con cangiare x in y e viceversa.

2. L' esclusione data ai numeri negativi e frazionarii, non indica sempre si speditamente le soluzioni di un problema indeterminato; sovente è mestieri ricorrere ad artificj singolari d' analisi, affin di non assegnare alle incognite che valori interi e positivi.

3. Ogni equazione di primo grado, a due inco-

(*) Queste nozioni son tratte dalle Giunte di LACROIX all' *Algebra* di CLAIRAUT.

gnite, può essere rappresentata dalla formola $ax+by=c$; supponendo che a, b, c, siano tre numeri interi e cogniti: e supponendo inoltre che a e b non abbiano nessun fattore comune, il quale non entri come fattore anche in c. Sarà agevole il sentire la necessità di quest' ultima condizione, se si osservi che ove vogliansi, p. e., $a=km$, e $b=kn$, ne risulteranno le equazioni $kmx+kny=c$, $mx+ny=\frac{c}{k}$; nè potran per conseguenza riuscire interi i numeri x ed y, quando c non sia divisibile esattamente per k, assunto fattor comune dei due a, b.

4. L' equazione, $ax+by=c$ non esige alcuna preparazione, allorchè un dei coefficienti a, b sia eguale all' unità. Perocchè, se s' abbia, p. e., $a=1$, s' avrà $x=c-by$; e non prendendo per y che soli numeri interi, non se ne otterran che di tali anche per x.

5. Ma passiamo al caso generale, e supponiamo che nell' equazione $ax+by=c$, s' abbia $a<b$; Sia ma il massimo dei moltiplici di a, contenuti in b; di modo che s' abbiano $b=m\ a+r$, ed $r<a$. Ne verrà l' equazione $ax+may+ry=c$; e, ponendo $x+m\ y=t$, avremo $ry+at=c$. Ora

1.° Se r si trovi eguale all' unità la questione è sciolta. Difatti si hanno in tale ipotesi l' equazioni $x+m\ y=t$, ed $y+at=c$, dalle quali ricavansi $y=c-at$, ed $x=t-my$. Quindi si avranno numeri interi per x e per y; prendendo numeri della stessa indole per t. (4).

2.° Se poi r sorpassi l' unità, essendo $r<a$, si potrà porre $a=m'\ r+r'$, e riguardare $m'r$ come il massimo de' moltiplici di r, che capir possonsi in a. Conseguentemente, sostituendo questa espressione nella equazione $ry+at=c$, otterremo $ry+r'mt+r't=c$, ossia (con assumere $y+m't=u$) $r't+ru=c$;

S' avran dunque le tre equazioni $x+my=t$, $y+m't=u$, $r't+ru=c$; le quali, in ipotesi di $r'=1$, daranno $x=t-my$, $y=u-m't$, $t=c-ru$; e, prendendo per u un numero intero, se ne trarranno in numeri interi anche i valori di t, di y e di x.

3.° Qualora r' pure sorpassi l' unità, si opererà sull' ultima equazione $r't+ru=c$, come si è operato sulle analoghe precedenti; e, poichè $r'<r$, potrà farsi $r=m''r'+r''$, assumendo $m''r'$ come il massimo de' moltiplici di r', che capir possono in r. Con questa foggia d' espressione, l' equazione $r't+ru=c$ si cangerà in $r'(t+m''u)+r''u=c$. Però, mettendo $t+m''u=v$, s' avià $r'u+r''v=c$; e nell' ipotesi di r'' uguale all' unità ne risulteranno le equazioni

$$x+my=t,\ y+m't=u,\ t+m''u=v,\ u+r'v=c.$$

d' onde trarransi le altre

$$x=t-my,\ y=u-m't,\ t=v-m''u,\ u=c-r'v:$$

valori che riusciran sempre interi, ove il sia v.

È agevole l' avvedersi che questo processo di calcolo, continuato quant' è d' uopo, condurrà infallibilmente ad una equazione, in cui una delle incognite avià l' unità per coefficiente. I valori di r, r', r'' . . . ec. s' ottengono coll' operazione medesima che accadrebbe d' impiegare, qualora si cercasse il massimo comun divisore de' due numeri b ed a, e che darebbe l' unità per ultimo risultato, essendo siffatti numeri o potendosi sempre rendere (3) numeri *primi* tra loro. (*) Difatti nella serie delle espressioni

$b=ma+r$, $a=m'r+r'$, $r=+m''r'+r''$, ec., r, è il residuo della divisione di b per a, r' quello

(*) Si chiaman *primi tra loro* due numeri che non hanno divisor comune maggiore della unità.

della divisione di a per r, r'' quello della divisione di r per r', e così successivamente.

6. Per fare l'applicazione del metodo or ora esposto a qualche esempio particolare, suppongasi un uomo il quale *non abbia che monete da 5. lire e da 24. lire*, e cerchisi *quante debba dare dell'une, e dell'altre, onde formar la somma di 109. lire.*

Chiamando x il numero richiesto delle monete da 5 lire, ed y quello delle monete da lire 24, ne risulterà l'equazione $5x+24\ y=109$. S'otterrà quindi per questo caso $a=5$, $b=24$, $c=109$; e troveransi $m=4$, $r=4$, $m'=1$, $r'=1$. Conseguentemente si avrà

$$x+4\ y=t\ ,\ y+t=u\ ,\ t+4u=109\ ;$$

d'onde ricaveressi

$$x=t-4y\ ,\ y=u-t\ ,\ t=109-4u\ ;$$

e risalendo dal valore di t a quelli di y e di x, riusciran finalmente

$$y=5u-109\ ,\ x=545-24\ u.$$

Non volendosi trarre da queste formole che soli risultati positivi, conviene assumere necessariamente per u numeri tali che s'abbia $5u>109$, e $24\ u<545$. Siffatti numeri sono compresi fra $\frac{109}{5}$ e $\frac{545}{24}$ cioè fra 21 e 23, e per conseguenza riduconsi a un solo, cioè a 22. Ora, posto $u=22$, si hanno $y=1$ ed $x=17$; e, in realtà, 17. monete di 5. lire, ed una da 24. danno precisamente la somma prefissa di lire 109.

Giova avvertire che il problema or ora sciolto, equivale precisamente all'altro di *dividere il numero 109. in due parti, delle quali una sia di-*

visibile esattamente per 5, *e l' altra per* 24. Quest' esempio è osservabile per ciò che il problema riesce determinato e non ammette che una soluzione sola, allorchè vogliensi esclusi i valori negativi e frazionarj. Non avverrà lo stesso nell' esempio seguente.

7. *Taluno compera cavalli e buoi pagando* 31. *scudi per ciascun de' primi, e* 20 *scudi per ognun de' secondi: il prezzo totale de' buoi sorpassa di* 7. *scudi quello de' cavalli; quanti potevano essere i cavalli, e quanti i buoi.*

Denominando x il numero de' buoi, ed y quello de' cavalli, avrassi

$20\,x=31y+7$, ossia $20\,x-31\,y=7$, cosicchè, nel caso attuale, $a=20$, $b=-31$, $c=7$: e conseguentemente

$$m=-1,\ r=-11;\ m'=-1,\ r'=+9,\ m''=-1,\ r''=-2,\ m'''=-4,\ r'''=+1.$$

Si ponga dunque
$x-y=t$, $y-t=u$, $t-u=v$, $u-4v=\omega$, e otterrassi in ultimo luogo $v-2\omega=7$; equazione che dà, rimontando ai valori di x e di y, $v=7+2\omega$, $u=28+9\omega$, $t=35+11\omega$, $y=63+20\omega$, $x=98+31\,\omega$.

Qui non v' è nulla che limiti i valori di x e di y, i quali rimangon positivi anche quando vogliansi prendersi per ω i valori negativi -3, -2, -1; e col fare successivamente

$x = -3$,	si trova	$y = 3$	$x = 5$
$= -2$		$= 23$	$= 36$
$= -1$		$= 43$	$= 67$
$= 0$		$= 63$	$= 98$
$= 1$		$= 83$	$= 129$
$= 2$		$= 103$	$= 160$
$= 3$		$= 123$	$= 191$
ec.		ec.	ec.

8. I valori di y, come quelli di x, formano evidentemente due progressioni aritmetiche; nella progressione relativa ad y, la differenza è uguale al coefficiente che aveva x nell' equazione fondamentale; e nella progressione relativa ad x, la differenza eguaglia il coefficiente di y, nell' equazione stessa. Nè è difficile l' accertarsi che siffatta circostanza si verifica sempre; basta a tal uopo risalire da' valori generali di v; u, t (5) a quelli di x e di y, che troveransi rappresentabili dalle formole $x=A+bv$, $y=B+av$.

9. Quando si conoscesse *a priori*, o si fosse trovato per caso una soluzione di qualche equazione indeterminata, se ne potrebbono ottener tosto infinite altre. Siano per esempio, $x=\alpha$, $y=\beta$, i due valori trovati: avrem per ipotesi $a\alpha+b\beta=c$; e sottraendo questa equazion dalla proposta $ax+by=c$, ne risulterà $a(x-\alpha)+b(\beta-y)=0$, ossia

$x-\alpha=\frac{b}{a}(\beta-y)$. Ora, poichè i numeri a e b sono *primi* tra loro, la quantità $\frac{b}{a}(\beta-y)$ non può essere unmero intero, se $\beta-y$ non sia un multiplo di a: condizione che adempirassi, ponendo $\beta-y=pa$, intendendo per p un numero intero qualunque. In tal modo, s' avran per determinare x ed

y le due equazioni $x-\alpha=bp$, $\beta-y=pa$, che ci daranno $x=\alpha+bp$, $y=\beta-pa$. Espressioni le quali provano d' una maniera semplicissima che i valori di x e di y debbon formare due progressioni aritmetiche, come dicevasi poc' anzi.

10. Il metodo esposto più sopra (5), è generale, e può applicarsi a un numero qualunque di equazioni. Propongasi, per esempio; *di trovare un numero che diviso per 2, dia 1 per residuo: diviso per 3, dia 2 per residuo; e diviso per 5, dia per residuo 3.*

Sia N il numero cercato, e siano x, y, z i quoti rispettivi che s' hanno, dividendolo per 2, per 3 per 5. L' enunciazion del problema darà $N=2x+1$, $N=3yy+2$, $N=5z+3$; le quali equazioni riduconsi immediatamente alle seguenti;

$$2x+1=3y+2,\ 3y+2=5z+3,\ \text{ossia}\ 2x-3y=1,\ 3y-5z=1.$$

Sciolgasi la prima, come se fosse sola: si troverà $y=2t-1$, $x=3t-1$. Sostituendo il valore di y nella seconda, avremo $-5z+6t=4$: nuova equazione cui sarà mestieri di sciogliere. Da questa si trarranno le altre $z-t=u$, $-5u+t=4$, e per conseguenza $z=6u+4$. Quindi, risalendo ai valori di x e di y, s' avrà

$x=15u+11$, $y=10u+7$, $z=6u+4$; e l' una delle equazioni primitive, per esempio,

$N=2x+1$, darà $N=30u+23$.

Il minimo de' valori che possa attribuirsi ad N, s' ottiene supponendo $u=0$; nel qual caso $N=23$: numero che diviso per 2, per 3 e per 5, lascia effettivamente i residui 1, 2 e 3.

11. Quest' esempio, comecchè assai semplice, dimostra abbastanza in qual modo convenga proce-

dere ne' problemi più complicati. I principianti potranno, per esercizio, cercar lo scioglimento delle due equazioni

$3x + 5y + 7z = 560$, $9x + 25y + 49z = 2920$.
Eliminando z, eglino troveranno

$$12x + 10y = 1000:$$

equazione che si semplifica di vantaggio, con dividerne per 2 tutti i termini, e si riduce a $6x + 5y = 500$. In appresso, ponendo $x + y = t$, ne verrà $x + 5t = 500$, ossia $x = 500 - 5t$, ed $y = 6t - 500$. Sostituendo questi valori di x e di y nella prima delle due equazioni date, che è la più semplice, otterrassi $7z + 15t = 1560$; e questa, sciolta col metodo prescritto, darà

$$\begin{aligned} t &= 1560 - 7u \\ z &= 15u - 3120 \\ y &= 8860 - 42u \\ x &= 35u - 7300 \end{aligned}$$

D'onde è manifesto che v' hanno due sole soluzioni in numeri positivi, quelle cioè che corrispondono alle ipotesi di $u = 209$ e di $u = 210$; poichè u debb' essere insieme e

$$> \frac{7300}{35} \text{ e } < \frac{8860}{42}.$$

12. Se sia proposta un'equazione a tre incognite, $ax + by + cz = d$, si farà dapprima passare nel secondo membro il termine cz, scrivendo $ax + by = d - cz$; si supporrà in secondo luogo $d - cz = c'$; e non rimarrà più che a maneggiare l'equazione a due incognite $ax + by = c'$. Allorchè poi, partendo da questa, si sarà giunto all'equazione, nella quale una delle due incognite non ha per coefficiente che l'unità, si risalirà successivamente ai valori di x e di y, surrogando,

$d - c\,z$, ac'; e in ipotesi che v sia l'ultima delle incognite ausiliari (5), l'espressione di x e di y conterrà allora due numeri interi v e z, determinabili ad arbitrio.

13. Sia, per esempio, $5\,x + 8y + 7\,z = 50$. Si farà, secondo il metodo or ora divisato, $5x+8y = 50 - 7\,z = c'$; ritenendo quivi $a = 5$, $b = 8$, si troverà $m = 1$, $r = 3$, $m' = 1$, $r' = 2$, $m'' = 1$; $r'' = 1$. Quindi avrassi $x + y = t$, $y + t = u$, $t + u = v$, $u + 2v = c'$: donde si deduce $u = c' - 2v$, $t = 3v - c'$, $y = 2c' - 5v$, $x = 8\,v - 5\,c'$, e infine (rimettendo, in luogo di c', il suo valore $50 - 7z$) $x = 8v + 21\,z - 150$ $y = 100 - 14z - 5\,v$: espressioni, nelle quali si potran determinare z ed v ad arbitrio, sempre però in guisa che non ne risultino che valori positivi per x ed y.

14. Dei problemi indeterminati che oltrepassano il primo grado, tratteremo assai brevemente. La difficoltà di trovar le loro soluzioni in numeri o interi o anche solo razionali, è molto maggiore di quella che incontrasi ne' problemi della classe da noi considerata finora.

Cominciano dall'equazione

$$y = \frac{a + b\;x + c\;x^2 + d\;x^3 + e\;x^4 + \text{ec.}}{a' + b'\;x + c'\;x^2 + d'\;x^3 + e'\;x^4 + \text{ec.}}$$

in cui l'incognita y non monta che alla prima potenza. Siano

$$a + b\;x + c\;x^2 + d\;x^3 + e\;x^4 + \text{ec.} = p,$$
$$a' + b'\;x + c'\;x^2 + d'\;x^3 + e'\;x^4 + \text{ec.} = q,$$

eliminando x da queste due equazioni; se ne troverà, tra p e q, una della forma

$$A + Bp + Cq + Dp^2 + Epq + Fq^2 + \text{ec.} = 0,$$

nella quale i coefficienti A, B, C ec. saranno numeri razionali ed interi, dipendenti da a, a', b, b', ec. Ma per ipotesi, $y = \frac{p}{q}$, ossia $p = q\,y$;

dunque sostituito a p questo valore l'equazione precedente diverrà.

$A + Bq\,y + Cq + D\,q^2y^2 + E\,q^2\,y + F\,q^3 + \text{ec.} = 0$: nella quale poichè sono divisibili per q tutti i termini dopo il primo, dovrà esserlo questo pure, affinchè riescano, a un tempo, numeri interi i valori di q e di y.

Si cercheran dunque tutti i divisori del numero intero e cognito A, che supporremo indicati dalle lettere, α, β, γ; ec.: quindi, mettendo ciascun di questi divisori in luogo di q, s'avranno le equazioni determinate in x

$$\alpha = a' + b'\,x + c'\,x^2 + \text{ec.}$$
$$\beta = a' + b'\,x + c'\,x^2 + \text{ec.}$$
$$\gamma = a' + b'\,x + c'\,x^2 + \text{ec.}$$
ec. . . . . ;

e, trovate per via degli artificj opportuni (ved. il Cap. II. delle aggiunte precedenti) le radici loro razionali e intere, se ve ne abbiano, si farà scelta di quelle che rendano p divisibile per q. In tal modo saran determinati tutti i valori di x, che posson dare in numeri interi il valore di y nell'equazione proposta; e la quistione sarà sciolta.

15. E' agevole accorgersi per ciò che s'è detto finora, che il numero delle soluzioni di cosiffatte equazioni in valori interi, è sempre necessariamente limitato; non è da eccettuarne che un caso solo, al quale d'altronde non è applicabile il metodo orora esposto.

Questo caso è quello in cui il denominatore q non contenga l'incognita x, e sia, per esempio,

$$y = \frac{a + b\,x + c\,x^2 + dx^3 + \text{ec.}}{a'}.$$

Allora, se si conosca una soluzione qualunque

del problema, se ne possono trovar tosto infinite altre. Difatti se l'ipotesi di $x = \alpha$ renda la quantità

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ec.}$$

divisibile esattamente per a', tutti i numeri compresi nella formola $\alpha \pm m a'$, godranno della stessa prerogativa; poichè, col surrogarli ad x, la quantità

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ec.}$$

prenderà la forma seguente:

$\alpha + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \text{ec.}, A m a' + B m^2 a'^2 + \text{ec.}$ Quantità, la quale debb' essere divisibile per a', essendosi supposta a' divisore esatto della porzione

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \text{ec.} \ldots\ldots$$

Queste stesse considerazioni dimostrano che il problema potrà sempre sciogliersi per mezzo di qualcuno de' numeri interi rinchiusi fra $\frac{a'}{2}$ e $-\frac{a'}{2}$. Perocchè; comunque α possa trovarsi fuori di questi limiti, sarà sempre possibile il prendere il numero arbitrario m in modo che $\alpha \pm m a'$ vi si trovi compreso. D'onde apparisce che affin di abbattersi in qualche soluzione, basterà sperimentare tutti i numeri interi compresi fra $\frac{a'}{2}$ e $-\frac{a'}{2}$.

16. Se il problema proposto, fosse di trovare *due numeri, il cui prodotto, aggiunto alla lor somma, dia* 79;

Chiamando x ed y i numeri richiesti, l'equazione da sciogliere, sarebbe $x+y+xy=79$; dalla quale traendo il valore di y, otterremmo. . . . .

$$y = \frac{79-x}{x+1} = -\frac{x-79}{x+1} = -\frac{x+1-80}{x+1} = -1 + \frac{80}{x+1}.$$

Quest' ultimo risultato dà tosto a vedere che la quistione sarà sciolta, col prendere in luogo di $x+1$, i divisori esatti di 80, i quali sono

1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80,

e che danno rispettivamente

$x=$ 0, 1, 3, 4, 7, 9, 15, 19, 39, 79,

$y=$ 79, 39, 19, 15, 9, 7, 4, 3, 1, 0.

17. Ma veniamo all' equazione

$$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2=0,$$

in cui entrambe le incognite s' alzano alla seconda potenza. Essa riducesi ad

$$y^2+\left(\frac{ex+c}{f}\right)y=-\frac{a+bx+dx^2}{f}.$$

e trattata coi metodi prescritti altrove per le equazioni determinate di secondo grado, dà per conseguenza

$$y=-\frac{ex+c}{2f}\pm\frac{\sqrt{((ex+c)^2-4f(a+bx+dx^2))}}{2f},$$

ossia.

$$2fy+ex+c=\pm\sqrt{((ex+c)^2-4f(a+bx+dx^2))}.$$

Ordinando, per rapporto ad x, la quantità soggetta al radicale, previe le moltiplicazioni indicate, le si darà la forma

$m+nx+px^2$, in cui saranno

$$c^2-4af=m, 2ce-4bf=n, e^2-4df=p.$$

Se non si vogliano, per x ed y, che numeri razionali, sia interi sia frazionarj, la difficoltà del problema starà tutta in trovare i valori di x, atti a rendere quadrato perfetto la quantità $m+nx+px^2$ e nominando t^2 questo quadrato, s' avrà . . . . .

$$2fy+ex+c=\pm t.$$

Per ottenere x, sciogliamo co' noti metodi l' equazione di secondo grado $m+nx+px^2=t^2$: troveremo

$$x=-\frac{n}{2p}\pm\frac{\sqrt{(n^2-4mp+4pt^2)}}{2p}, \text{ ossia } \ldots$$

$2px+n=\pm\sqrt{(4pt^2+n^2-4mp)}$ ossia ancora, ponendo $4p=A$, $n^2-4mp=B$, $2px+n=\pm\sqrt{(At^2+B)}$.

Questo ultimo risultato dimostra che la quistione è ridotta a determinare t in maniera che la quantità $\sqrt{(At^2+B)}$ riesca razionale, vale a dire che At^2+B sia un quadrato. Perocchè, se si esprima col simbolo u^2 siffatto quadrato, le due incognite x ed y non dipenderanno più che dalle due equazioni di primo grado

$$2fy+ex+c=t, 2px+n=u,$$

nelle quali c, e, f, n e p son razionali, del pari che le quantità t ed u.

18. La determinazione di t, dietro alla condizione enunciata poc'anzi, ossia lo scioglimento dell' equazione $u=\sqrt{(At^2+B)}$ in numeri razionali, offre in generale, grandi difficoltà. Uno de' casi più semplici, è quello in cui A sia un quadrato. Rappresentando per mezzo di a^2 questo quadrato, sarà

$$u=\sqrt{(a^2t^2+B)}$$

e supponenbo $u=at+y$, ne verrà $at+y=\sqrt{(a^2t^2+B)}$: cosicchè, quadrando entrambi i membri e riducendo, otterrassi in fine $2yat+y^2=B$, e per conseguenza

$$t=\frac{B-y^2}{2ay}.$$

D' onde rilevasi che, preso per y un numero razionale, t pure diverrà razionale, e quindi anche u, x, ed y.

2.° Allorchè B è un quadrato, rappresentabile per mezzo di β^2, l' equazion proposta sciogliesi ancora colla medesima facilità. Col supporre . . . . $u=vt+\beta$, si ha

$$(vt+\beta)^2=At^2+\beta^2:$$

equazione che si riduce all' altra

$$v^2t^2+2\beta vt=At^2$$

ossia alla

$$v^2t+2\beta v=At,$$

da cui risulta in fine

$$t=\frac{2\beta v}{A-v^2}.$$

3.° Finalmente, se la quantità At^2+B possa decomporsi in due fattori razionali, $\alpha' t+\beta'$, $\alpha t+\beta$, in modo che si abbia

$$(\alpha t+\beta)(\alpha' t+\beta')=At^2+B.$$

si farà

$$u=v(\alpha t+\beta);$$

quindi se ne dedurrà

$$v^2(\alpha t+\beta)^2=(\alpha t+\beta)(\alpha' t+\beta');$$

e, sopprimendo il fattor comune $(\alpha t+\beta)$, si troverà

$$v^2(\alpha t+\beta)=\alpha' t+\beta' t+\beta', \text{ ossia } t=\frac{\beta'-\beta v^2}{\alpha v^2-\alpha'}.$$

19. Ove si conosca un valor qualunque razionale di t, è agevole il dedurne infiniti altri che sodisfacciano all'equazione proposta. Per dimostrarlo, supponiamo che sia α il valore dato di t, e β il valore che ne risulta per u; avremo, in tale ipotesi, $\beta=\sqrt{(A\alpha^2+B)}$ ossia $\beta^2=A\alpha^2+B$: equazione che sottratta dall' altra $u^2=At^2+B$, ci darà

$$u^2-\beta^2=A(t^2-\alpha^2) \text{ ossia } u^2=A(t^2-\alpha^2)+\beta^2,$$

e che, posto $u=(t-\alpha)v+\beta$, fatte le opportune sostituzioni, ed elevati entrambi i membri al quadrato, ci condurrà al risultato

$$v^2(t-\alpha)^2+2\beta v(t-\alpha)=A(t^2-\alpha^2)$$

Sicchè, dividendo per $t-\alpha$, troveremo

$$v^2(t-\alpha)+2\beta v=A(t+\alpha), \text{ ossia } \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t=\frac{2\beta v-A\alpha-\alpha v^2}{A-v^2}.$$

formola che darà sempre numeri razionali per t, quando se ne prendano di tali per v.

20. Non è difficile il fare quante applicazioni si

vogliano delle formole precedenti; noi si ristringeremo alle due seguenti:

Trovare due numeri x *ed* y, *la somma o la differenza dei cui quadrati eguagli un dato quadrato* β.

Le equazioni da sciogliere, saranno

$$y^2+x^2=\beta^2,\ y^2-x^2=\beta^2$$

e condurranno alle due

$$y=\sqrt{(\beta^2-x^2)},\ y=\sqrt{(\beta^2+x^2)}:$$

espressioni che sono immediatamente relative al secondo caso del n.° 18. Difatti, ponendo $y=\nu x-\beta$ si avrà per l'una

$$(\nu x-\beta)^2=\beta^2-x^2,$$

e per l'altra

$$(\nu x-\beta)^2=\beta^2+x^2,$$

Dalla prima delle quali si trarrà

$$x=\frac{2\beta\nu}{\nu^2+1},$$

e della seconda

$$x=\frac{2\beta\nu}{\nu^2-1},$$

e sostituiti questi valori di x nelle equazioni date per y, si avrà

$$y=\frac{\beta(\nu^2-1)}{\nu^2+1} \text{ ed } y=\frac{\beta(\nu^2+1)}{\nu^2-1},$$

Onde coll'assegnare valori razionali a β e ad ν, s' otterran razionali parimenti i valori di x e di y.

Per esempio, se si prenda $\beta=5$, le equazioni proposte diverranno.

$y^2+x^2=25,\ y^2-x^2=25;$

nella prima delle quali si avrà

$$x=\frac{10\nu}{\nu^2+1},\ y=\frac{5[\nu^2-1]}{\nu^2+1},$$

nella seconda

$$x=\frac{[illegible]}{v^2-1},\quad y=\frac{5(v^2+1)}{v^2-1}$$

Non si può supporre $v=1$, perchè una delle espressioni di y diverrebbe allora $\frac{0}{2}$, e l'altro $\frac{12}{0}$.

Ma col fare successivamente $v=2$, $v=3$, $v=4$, ec. le soluzioni della prima equazione saranno

$$x=4,\quad y=3,\quad x=\frac{40}{17},\ \text{ec.}$$

$$y=3,\quad y=4,\quad y=\frac{75}{17},\ \text{ec.}$$

e quelle della seconda

$$x=\frac{20}{3},\quad x=\frac{30}{8},\quad x=\frac{40}{15},\ \text{ec.}$$

$$y=\frac{25}{3},\quad y=\frac{50}{8},\quad y=\frac{85}{15},\ \text{ec.}$$

In quest' ultima non si giugne mai a numeri interi, finchè si danno valori interi a v; ma se si ponga, per esempio, $v=\frac{2}{3}$, ne risultano tosto $x=12$ ed $y=13$.

In generale, è agevolissimo lo sciogliere in numeri interi la seconda quistione, allorchè β^2 è numero dispari. Basterà assumere l'equazione $2a+1=\beta^2$, ossia $a=\frac{\beta^2-1}{2}$, e prendere $x=a$ ed $y=a+1$, ne risulteranno

$x^2=a^2$, $y^2=a^2+2a+1$, ed $y^2-x^2=2a+1$.

Così, nell' esempio proposto, ove $x^2=25$, si trova $a=\frac{24}{2}=12$, e per conseguenza $x=12$ ed $y=13$ come poc'anzi.

21. Non è nostro intendimento il portar qui più

oltre la soluzione delle equazioni indeterminate. I lettori che amassero applicarsi di proposito a questo ramo d' Analisi, potran consultare le Memorie dell' Accademia di Berlino per l'anno 1769, e gli Elementi d' Algebra d' EULERO colle aggiunte di LAGRANGE. Troveranno eglino in queste e lo scioglimento completo dell'equazione $u = \sqrt{(At^2+B)}$, sciolta da noi per alcune ipotesi assai limitate, e molte altre discussioni di somma importanza.

22. I numeri, considerati in se medesimi, indipendentemente da ogni sistema di numerazione; e da qualsiasi particolar quesito, hanno alcune proprietà osservabili. Parecchie sono relative alla divisibilità degli uni per gli altri: altre alla loro decomposizione in potenze perfette BACHET *de Meziriac*, a cui dobbiamo un eccellente Commento sull' Aritmetica o piuttosto sull' Analisi Numerica di DIOFANTO, osservò che *un numero qualunque, sempre o un quadrato, oppure la somma di due è di tre o di quattro quadrati al più*: Difatti 10 è la somma dei due quadrati 1 e 9; 24 quella de' tre quadrati 4, 4 e 16; 39; quella de' quattro quadrati 1, 4, 9 e 25.

Questa proposizione fu dimostrata poco appresso da FERMAT; ma lo scritto, in cui egli proponevasi di raccogliere le interassanti scoperte da se fatte intorno alla teoria de' numeri, non è giunto a noi; e non s' avea del teorema accennato che una prova imperfetta per via d' induzione, finchè LAGRANGE prese a mostrare la verità con altro genere di argomenti nelle Memorie dell' Accademia di Berlino per l' anno 1770, EULERO ne diede poscia una seconda dimostrazione alquanto più semplice negli Atti dell' Accademia di Pietroburgo per l' anno 1777, parte seconda.

Ai tempi nostri s' è riconosciuta nei numeri *pri-*

mi (*) la proprietà seguente: *Se* n *esprima un numero primo qualunque, il prodotto* 1. 2. 3. . . . (n—1), *coll'aggiunta dell'unità sarà sempre divisibile per* n. Per esempio, se $n=7$; si avrà 1. 2. 3.... $(n-1) = 1. 2. 3. 4. 5. 6. = 720$: e aggiungendovi l'unità, ne risulta 721 che diviso per 7, dà 103. per quoto esatto. Anche questo teorema fu dimostrato per la prima volta da LAGRANGE nelle Memorie dell' Accademia di Berlino, anno 1771.

23. Non sarà inutile osservare che le proprietà de' numeri corrispondono ad altrettanti teoremi di Analisi indeterminata. La prima delle due accennate poc' anzi, equivale all' asserire che l' equazione

$$u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = A$$

può sempre sciogliersi in numeri interi, qualunque sia il numero A; la seconda proprietà suppone che nell' equazione

$$1. 2. 3.... (n-1)+1=nx,$$

x esser debba sempre numero intero, allorchè n è un numero *primo*.

24. A siffatto genere di ricerche non si son guari rivolti che i maggiori Matematici del nostro secolo. Eglino han dimostrato la più parte dei teoremi, de' quali non trovasi nell' Opera di FERMAT che la semplice enunciazione; siccome può scorgersi da molte Memorie sparse nei volumi delle Collezioni Accademiche di Pietroburgo, di Berlino, e di Parigi, e meglio ancora dalla *Storia de' Numeri*, data in luce ultimamente da LEGENDRE, la quale è un Trattato compiuto su questa materia.

FINE.

(*) Si dà il nome di numeri *primi*, assolutamente parlando, a quelli che non risultano dalla moltiplicazione di altri numeri minori.



TAVOLA

Avviso dell' Editore. Pag. III

TRATTATO ELEMENTARE DI GEOMETRIA.

CAPO I. *Definizioni e Nozioni preliminari.* 1
CAPO II. *Proprietà dell' incontro scambievole delle linee rette.* 10
CAPO III. *Delle linee parallele: diversi usi delle loro proprietà.* 21
CAPO IV. *Del incontro delle linee rette colle linee circolari, e dell' incontro vicendevole delle linee circolari.* 29
CAPO V. *Delle linee proporzionali: delle figure simili: delle linee tagliate in ragione reciproca.* 40
Dalle linee proporzionali in generale. 41
Della similitudine delle figure. 46
Delle linee segate in ragione reciproca. 53
CAPO VI. *Misura e paragone delle superficie dei poligoni.* 59
Misura delle superficie. id.
Paragone delle superficie. 68
CAPO VII. *Proprietà particolari del triangolo rettangolo: usi di queste proprietà metodo per trovare il rapporto prossimo della circonferenza del circolo al raggio.* 72
CAPO VIII. *Di alcune proprietà generali de' Piani.* 79
De' Piani paralleli. 84

CAPO IX. *Misura della superficie e della solidità del Prisma.* 85
CAPO X. *Misura della superficie e della solidità della Piramide.* 90
CAPO XI. *Misura della superficie e della solidità della Sfera.* 97
CAPO XII. *Paragone della superficie e delle solidità de' corpi simili.* 102
CAPO XIII. *Elementi di Trigonometria.* 106
SEZIONE I. *Della Trigonometria rettilinea.* id.
Costruzione delle Tavole trigonometriche. 110
Risoluzione de' triangoli rettangoli. 115
TAVOLA I. *Risoluzione dei triangoli rettangoli.* 121
TAVOLA II. *Risoluzione dei triangoli obbliquangoli.* 122
Applicazioni ad alcuni esempj. 123
SEZIONE II. *Della Trigonometria sferica.* 126
TAVOLA I. *Risoluzione d' un Triangolo rettangolo sferico.* 139
TAVOLA II. *Risoluzione d' un triangolo sferico qualunque.* 141
Osservazioni sopra le due Tav. precedenti. 143

APPLICAZIONE DELL' ALGEBRA ALLA GEOMETRIA.

CAPO I. *Principj generali : applicazioni agli esempj.* 144
Costruzione generale delle equazioni del primo grado. 165
Costruizone generale delle equazioni del secondo grado. 171
CAPO II. *Delle linee curve in generale.* 173
CAPO III. *Delle Sezioni coniche.* 183
Della Parabola. id.

Proprietà della parabola per rapporto ai suoi diametri. 189
Dell' Ellisse.
Proprietà dell' Ellisse per rapporto a' suoi diametri. 192
Dell' Iperbola
Proprietà dell' Ipeobola per rapporto a' suoi diametri. 200

APPENDICE

Sopra l' arte di levare i Piani e di costruire le Carte Geografiche. 223
Del modo di levare il piano dei Terreni un poco estesi. 224
Costruzione delle Carte Geografiche. 230
Costruzione de' Mappamondi. 232
Mappamondo sul piano dell' Equatore. id.
Mappamondo sul piano del Meridiano. 234
Mappamondo sul piano d' un Orizzonte. 237
Costruzione delle Carte particolari. 239

A G G I U N T E

AL CORSO DI MATEMATICA

DEL SIG. AB. BOSSUT.

Avvertimento. 241
CAPO I. *Considerazioni generali sopra la natura delle equazioni determinate di tutti i gradi.* 242
CAPO II. *Continuazione delle ricerche sopra la natura delle equazioni; metodi per trovare i divisori commensurabili che esse possono contenere.* 253

CAPO III. *Teoria delle equazioni che contengono radici eguali.* 267

CAPO IV. *Metodi per risolvere, per approssimazione, le equazioni numeriche di tutti i gradi.* 275

CAPO V. *Risoluzione prossima delle equazioni letterali.* 286

CAPO VI. *Metodo di HALLEY, per estrarre, per approssimazione, qualsivoglia radice da un binomio qualunque.* 293

APPENDICE *alla Trigonometria.* 296

TAV. I. *De' Seni degli Archi moltiplici, espressi in potenze del seno ec.* 303

TAV. II. *Seni degli Archi moltiplici, espressi in potenze del coseno ec.* 304

TAV. III. *Coseni degli Archi moltiplici espressi in potenze del cos. ec.* id.

TAV. IV. *Coseni degli Archi moltiplici, espressi in potenze del seno ec.* 305

TAV. V. *Potenze del seno dell' arco semplice, espresse in seni e coseni dell' arco moltiplice.* id.

TAV. VI. *Potenze del coseno dell' arco semplice: espressi in seni e coseni dell' arco moltiplice.* 306

NOZIONI GENERALI *sull' Analisi indeterminata.* 307

Pag. ERRORI	CORREZIONI
21 AB	AC
34 BOD	BOD più la metà di *b o d*
51 ODC	ODE
118 $\mp(AB)^2$	$\pm(AB)^2$
128 A e D	B e D
idem BF	AF
134 Cos. $\frac{A-C}{2}$	Cos. $\frac{A-B}{2}$
137 $\frac{BC+CB+AB}{2}$	$\frac{BC+AC-AB}{2}$
141 AC	AB
148 Ap, o	Apfo
155 A	C
161 BC	BH
163 $-2a^2c^2$	$-4a^2c^2$
176 $(VM)^2$	$(VM)^2+(VC)^2$
177 A	B
185 AQ	AB
idem AP	AQ
201 $\frac{TF}{PM}$	$\frac{TP}{PM}$
207 *gd*	*gg*
250 $x=5$	$x=2$
252 *ghk*	$ghkt^3$
254 $-3b^2p^2$	$-3b^2p$
273 $-6or$	$-6ot$
276 $h>d$	$h<d$

A S. E. Rma.

M. COLANGELO

Presidente della Pubblica Istruzione.

Il pubblico librajo Gennaro Mirelli, con umil suppliche fa presente a V. E. Rma. come desidera ristampare *il Corso delle Matematiche del signor Abate Bossut, colle annotazioni del Mozzoni*; prega perciò V. E. Rma. accordargli il dovuto permesso, e l'avrà ec.

Napoli 12 Aprile 1826.

Presidenza della Giunta per la pubblica Istruzione.

Il Regio Revisore Sig. D. Girolamo Parroco Pirozzi avrà la compiacenza di rivedere l'opera soprascritta e di osservare se vi sia cosa contro la Religione ed i dritti della Sovranità.

Il Deputato per la revisione de' libri.

Can. Francesco Rossi.

A S. E. Rma.

M. COLANGELO

Presidente della Pubblica Istruzione.

Ho letto l' opera che porta per titolo — *Corso delle Matematiche del sig. Bossut colle annotazioni del Mozzoni*, e nulla vi ho notato che possa offendere la Religione, o i dritti della Sovranità; per cui son di parere che possa permettersene la ristampa.

D. Girolamo Parroco Pirozzi R. R.

Napoli 20 Aprile 1826

Presidenza della Giunta per la pubblica Istruzione.

Vista la dimanda di Gennaro Mirelli, con la quale chiede di voler ristampare *il Corso delle Matematiche del signor Bossut colle annotazioni del Mozzoni.*

Visto il favorevole rapporto del Regio Revisore signor D. Girolamo Parroco Pirozzi.

Si permette, che l'indicato corso si stampi; però non si pubblichi senza un secondo permesso, che non si darà se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuta nel confronto uniforme la impressione all' originale approvato.

Il Presidente
M. COLANGELO.

Il Seg. Gen., e Membro della Giunta
Loreto Apruzzese.

2. C E B D

3. N C A B M

4. C A B

7. A C

8. A B C

9. A B C

C

12. A B C

13. A F B E C D

16. B B B b b b b b b b b b C A A A

17. B M C A

F

d b m a z

20. D E A C B

21. D E A C B

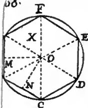


45. 46. 49. 50. 53. 54. 57. 58. 59. 63. 64. 65.

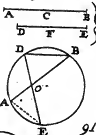
Quadrato

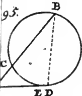
Trapezio

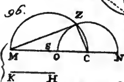


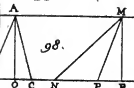

F
X
E
O
M
N
D
C

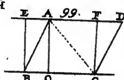

89.
f
Y
a
e
o
b
d
c


90.
A C B
D F E
D
B
O
A
E
91.

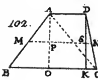

95.
B
C
E D

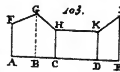

96.
Z
S
M O C N
K H

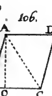

A
M
98.
O C N P R


E A 99. F D
B O C

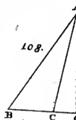

F
C


A D
102.
M P S N
B O K C


G 103. I
F H K
A B C D E

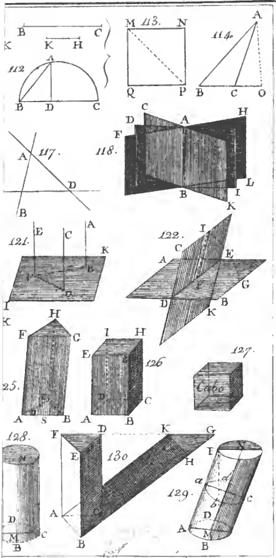

106.
A D
O C

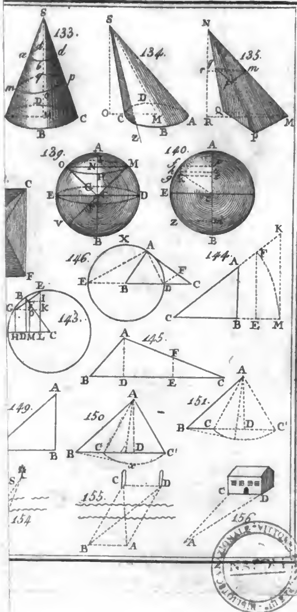

M Q
107.
N R P


A
108.
B C O


109.
a
b c o




B
C
K
K
H
112
A
B
D
C
M
113.
N
Q
P
114.
A
B
C
O
117.
A
D
B
118.
C
D
A
H
F
B
I
L
K
121.
E
C
A
K
I
122.
I
C
E
A
G
D
B
K
H
F
G
K
25.
A
S
B
I
H
E
126
D
C
A
B
127.
Cubo
128.
D
M
C
B
F
D
K
G
E
130
H
A
B
I
a
d
129.
c
b
D
A
M
B


133.
134.
135.
139.
140.
146.
144.
143.
145.
149.
150
151.
154
155.
156

160. 161. 166. 165. 169. 168. 170. 171. 173. 174. 177.



211.

212.

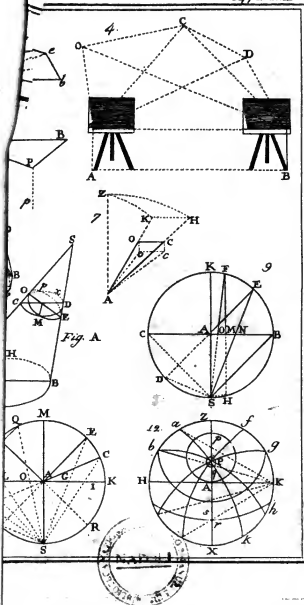
216.

217.

219.

220.




4.
7
9
12.
Fig. A





